Approximation der Exponentialfunktion durch Polynome und Transzendenz von e

Gero Friesecke, TUM, 29.1.2018

Transzendenz von e

Wir wollen folgende spektakulären *Satz* verstehen:

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_m e^m \neq 0 \quad \text{für beliebige ganze Zahlen } a_0, \ldots, a_m, \text{ nicht alle 0.} \tag{1}$$

D.h.: Die Euler'sche Zahl e ist *keine* Nullstelle irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten! (Charles Hermite, 1873)

Transzendenz von e

Wir wollen folgende spektakulären *Satz* verstehen:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \ldots + a_m e^m \neq 0 \\ \text{für beliebige ganze Zahlen } a_0, \ldots, a_m, \text{ nicht alle 0.} \end{gathered} \tag{1}$$

D.h.: Die Euler'sche Zahl e ist *keine* Nullstelle irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten! (Charles Hermite, 1873)

Def.: Zahlen mit dieser Eigenschaft heissen *transzendent*.

Beispiele: 1) rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:
Nicht transzendent, da Nullstelle von $x \mapsto qx - p$

2) $\sqrt{2}$: Nicht transzendent, da Nullstelle von $x \mapsto x^2 - 2$

Transzendenz von e

Wir wollen folgende spektakulären *Satz* verstehen:

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_m e^m \neq 0 \quad (1)$$
$$\text{für beliebige ganze Zahlen } a_0, \dots, a_m, \text{ nicht alle } 0.$$

D.h.: Die Euler'sche Zahl e ist *keine* Nullstelle irgendeines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten! (Charles Hermite, 1873)

Def.: Zahlen mit dieser Eigenschaft heissen *transzendent*.

Beispiele: 1) rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:
Nicht transzendent, da Nullstelle von $x \mapsto qx - p$

2) $\sqrt{2}$: Nicht transzendent, da Nullstelle von $x \mapsto x^2 - 2$

Beweisstrategie:
– Polynomapproximation der Exponentialfunktion, die besser ist als Taylor
– Reduktion modulo eineer geeigneten Primzahl

Polynomapproximation der Exponentialfunktion

Brauchen Approximation von exp auf $[0, m]$

Geniale Strategie (Charles Hermite): Bastele Polynom H, dass die Differentialgleichung der Exponentialfunktion, $H' = H$, an den Stellen $0, ..., m$ bis zu gegebenen Ordnungen $p_0, ..., p_m$ erfüllt, d.h.

$$H^{(j)}(k) = H(k), \quad k = 0, ..., m, \;\; j = 1, ..., p_k$$

sowie der Anfangsbedingung $H(0) = 1$ genügt.

Polynomapproximation der Exponentialfunktion

Brauchen Approximation von exp auf $[0, m]$

Geniale Strategie (Charles Hermite): Bastele Polynom H, dass die Differentialgleichung der Exponentialfunktion, $H' = H$, an den Stellen $0, \ldots, m$ bis zu gegebenen Ordnungen $p_0, \ldots, p_m$ erfüllt, d.h.

$$H^{(j)}(k) = H(k), \quad k = 0, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, p_k$$

sowie der Anfangsbedingung $H(0) = 1$ genügt.

Explizite Lösung:

- Bilde die Funktion $f(x) = (x-0)^{p_0} \cdot \ldots \cdot (x-m)^{p_m}$
- Setze $F(x) := \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}(x)$, $N =$ Grad von $f = p_0 + \ldots + p_m$
- (Zeige $F(0) \neq 0$ und) setze $H(x) := \frac{F(x)}{F(0)}$

Polynomapproximation der Exponentialfunktion

Brauchen Approximation von exp auf $[0, m]$

Geniale Strategie (Charles Hermite): Bastele Polynom H, dass die Differentialgleichung der Exponentialfunktion, $H' = H$, an den Stellen $0, \dots, m$ bis zu gegebenen Ordnungen $p_0, \dots, p_m$ erfüllt, d.h.

$$H^{(j)}(k) = H(k), \quad k = 0, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, p_k$$

sowie der Anfangsbedingung $H(0) = 1$ genügt.

Explizite Lösung:

- Bilde die Funktion $f(x) = (x-0)^{p_0} \cdot \dots \cdot (x-m)^{p_m}$
- Setze $F(x) := \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}(x)$, $N =$ Grad von $f = p_0 + \dots + p_m$
- (Zeige $F(0) \neq 0$ und) setze $H(x) := \frac{F(x)}{F(0)}$

Beispiele: 1) $m = 0$, $p_0 = 6$, also $f(x) = (x-0)^6$
2) $m = 2$, $p_0 = p_1 = p_2 = 2$, also $f(x) = (x-0)^2(x-1)^2(x-2)^2$

Polynomapproximation der Exponentialfunktion

Brauchen Approximation von exp auf $[0, m]$

Geniale Strategie (Charles Hermite): Bastele Polynom H, dass die Differentialgleichung der Exponentialfunktion, $H' = H$, an den Stellen $0, ..., m$ bis zu gegebenen Ordnungen $p_0, ..., p_m$ erfüllt, d.h.

$$H^{(j)}(k) = H(k), \quad k = 0, ..., m, \; j = 1, ..., p_k$$

sowie der Anfangsbedingung $H(0) = 1$ genügt.

Explizite Lösung:

- Bilde die Funktion $f(x) = (x-0)^{p_0} \cdot ... \cdot (x-m)^{p_m}$
- Setze $F(x) := \sum_{j=0}^{N} f^{(j)}(x)$, $N =$ Grad von $f = p_0 + ... + p_m$
- (Zeige $F(0) \neq 0$ und) setze $H(x) := \frac{F(x)}{F(0)}$

Beispiele: 1) $m = 0$, $p_0 = 6$, also $f(x) = (x-0)^6$
2) $m = 2$, $p_0 = p_1 = p_2 = 2$, also $f(x) = (x-0)^2(x-1)^2(x-2)^2$

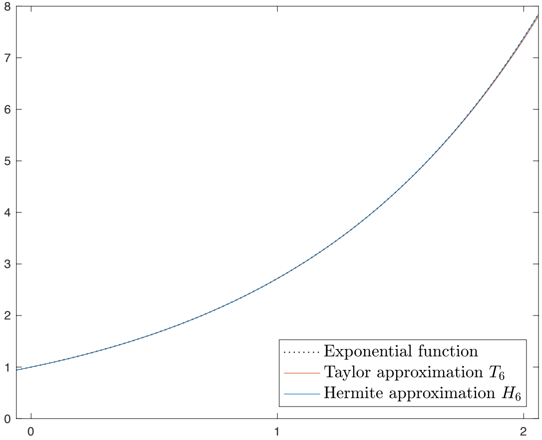
Bestimmen Sie jeweils F und H. (f ausmultiplizieren, 6mal ableiten, aufaddieren!) Danach ich: Welche Näherung ist in $[0, 2]$ besser?

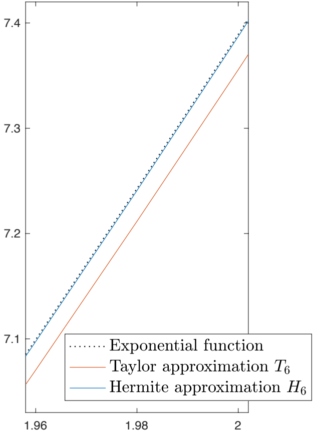
Ergebnis für $m = 0$, $p_0 = 6$: Genau das Taylorpolynom!

$$T_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

Ergebnis für $m = 2$, $p_0 = p_1 = p_2 = 2$:

$$H_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{31}x^3 + \frac{13}{248}x^4 + \frac{x^6}{248}$$

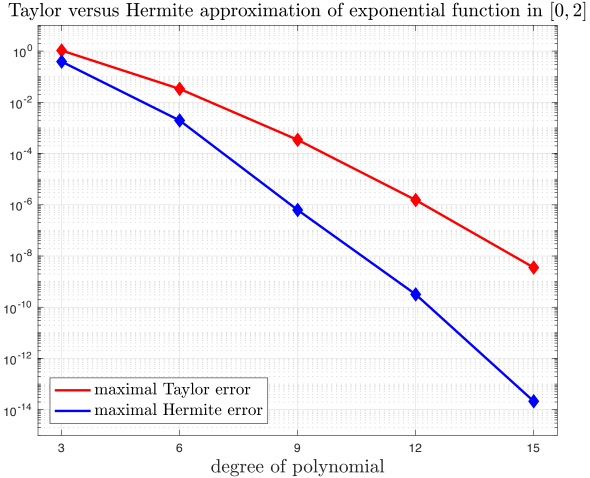




Was passiert, wenn wir den Polynomgrad variieren?

$f(x) = x^{3p}$: Taylorpolynom $T_{3p}(x) = \sum_{n=0}^{3p} \frac{x^n}{n!}$

$f(x) = [x(x-1)(x-2)]^p$: "Hermite"-Polynom $H_{3p}(x)$



Ergebnis: Hermite-Fehler viel kleiner als Taylor-Fehler

(rot: $\max_{x\in[0,2]} |H_{3p}(x) - e^x|$, blau: $\max_{x\in[0,2]} |T_{3p}(x) - e^x|$)

Differentialgleichung für F und Fehlerabschätzung

Nach Definition ist $F(x) = \sum_{i=0}^{N} f^{(i)}(x)$, also wegen $f^{(N+1)} = 0$

$$F' = \sum_{i=0}^{N} f^{(i+1)} = \sum_{i=1}^{N} f^{(i)} = F - f.$$

f entspricht also genau dem "Ausmass der Nichterfüllung" (oder "Residuum") der eigentlich gewünschten Dgl. $F' = F$. Wir folgern eine Abschätzung für $H(x) - e^x$ via f (Erinnerung: $H(x) = F(x)/F(0)$). Betrachte zunächst die Abweichung des Quotienten $H(x)/e^x$ von 1,

$$h(x) := \frac{H(x)}{e^x} - 1 = \frac{F(x)}{F(0)e^x} - 1.$$

Wegen $F' = F - f$ folgt $h'(x) = -f(x)/(F(0)e^x)$. Da ausserdem $h(0) = 0$, folgt für beliebiges $x \in [0, m]$ nach Mittelwertsatz

$$\left| \frac{F(x)}{F(0)e^x} - 1 \right| = |h'(\xi)| = \left| \frac{f(\xi)}{F(0)e^\xi} \right| \leq \frac{\max_{[0,m]} |f|}{F(0)} \quad \text{(für ein } \xi \in [0, x]).$$

Multiplikation mit e^x gefolgt von den Abschätzungen $e^x \leq e^m$ und $|f(x)| \leq (m^m)^{\max\{p_0,..,p_m\}}$ liefert

$$\left| \frac{F(x)}{F(0)} - e^x \right| \leq \frac{\max_{[0,m]} |f|}{F(0)} e^m \leq \frac{(m^m)^{\max\{p_0,..,p_m\}}}{F(0)} e^m \quad \text{für alle } x \in [0, m].$$