Aufgabe 1 (9 Punkte):
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $h \in C^1(U, \mathbb{R})$.

a) Bestimmen Sie einen Atlas der C^1-Untermannigfaltigkeit
$$M := \{x \in U \times \mathbb{R} \,|\, h(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}\}\,.$$
Beweisen Sie die Karteneigenschaften.

b) Bestimmen Sie eine Basis des Normalenraums dieser Untermannigfaltigkeit an $p \in M$.

Aufgabe 2 (6 Punkte):
Gegeben sei die Karte $\Phi : (0,1) \times (0, 2\pi) \to M$,
$$\Phi(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi, \varphi),$$
der Untermannigfaltigkeit $M := \Phi((0,1) \times (0, 2\pi))$.

a) Bestimmen Sie die Gramsche Determinante von Φ.

b) Berechnen Sie
$$\int\limits_M \left(x_1^2 + x_2^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}S(x)\,.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte):

a) Es seien $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
$$v(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix},$$
und $\gamma_1, \gamma_2 : (0,1) \to \mathbb{R}^3$,
$$\gamma_1(t) := \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma_2(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie
$$\int\limits_{\gamma_1} \langle v(x), \mathrm{d}x\rangle \quad \text{und} \quad \int\limits_{\gamma_2} \langle v(x), \mathrm{d}x\rangle.$$

b) Besitzt v ein Potential? Falls ja, geben Sie dieses an, falls nein, begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4 (6 Punkte):
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass
$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, f(x) < 0\}$$
eine beschränkte Menge mit C^1-Rand ist. Bestimmen Sie für $j \in \{1, \dots, n\}$:
$$\int\limits_\Omega \partial_j f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Aufgabe 5 (8 Punkte):

Die zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit $M := \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_3 \in (0,\infty)\}$ wird durch die Karte $\Phi : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to M$,

$$\Phi(\xi) := \begin{pmatrix} \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \\ \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}} \\ \sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2} \end{pmatrix},$$

beschrieben und sei durch $\mathbf{n} : M \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, orientiert. Berechnen Sie für $A := \Phi(\Omega)$ mit $\Omega := \{\xi \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < |\xi| < 2\}$ und das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$v(x) := \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix},$$

das Integral

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(x), \mathbf{n}(x) \rangle \, \mathrm{d}S(x)\,.$$