Nachtrag: I.3. Ausblick: Allg. Mannigfaltigkeiten

1. Im $\mathbb{R}^n$:

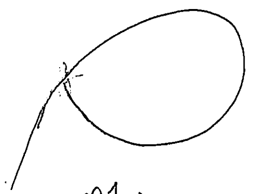
Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dim. $\mathcal{C}^\alpha$-Mannigfaltigkeit (MF) mit $k \in \{0,\dots,n\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, wenn zu jedem $p \in M$ eine offene Umgebung $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und eine injektive Abb $\Phi \in \mathcal{C}^\alpha(V, \tilde{U})$ gibt mit

$$M \cap \tilde{U} = \Phi(V) \quad \text{und} \quad \text{Rang}\, \Phi'(x) = k \quad \forall x \in V.$$

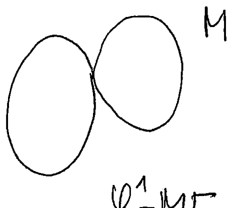
Bemerkung: M ist $\mathcal{C}^\alpha$-UMF, wenn zusätzlich gilt:

$\Phi^{-1}: M \cap \tilde{U} \to V$ ist stetig.

Beispiele für 1-dim MF, die keine UMF ist



$\mathcal{C}^1$-MF



$\mathcal{C}^1$-MF

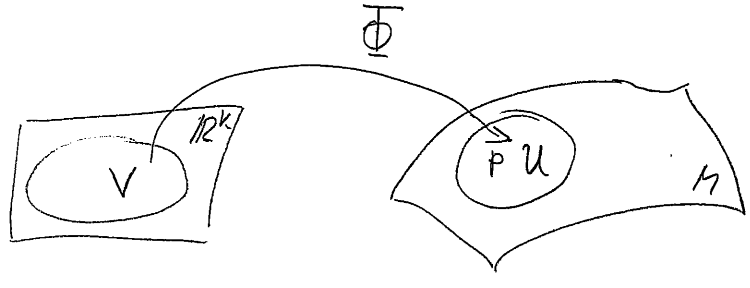
2. Allgemeiner:

Def: Ein Hausdorffraum (M,τ), der dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt ist eine k-dim. topologische MF, falls für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \in \tau$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und ein Homöomorphismus $\Phi: V \to U$ gibt.

Bem: HR = Topologischer Raum mit Trennungseigenschaft, d.h. $\forall x,y \in M\ \exists U_x, U_y \in \tau$ mit $x \in U_x$, $y \in U_y$ und $U_x \cap U_y = \emptyset$.

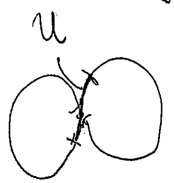
2. Abzählbarkeitsaxiom = $\forall x \in M\ \exists$ abzählbare Umgebungsbasis $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots\}$ mit Eigenschaft:

$\forall V \in \tau$ mit $x \in V$: $\exists U_k \in \mathcal{U}$: $x \in U_k \subset V$.

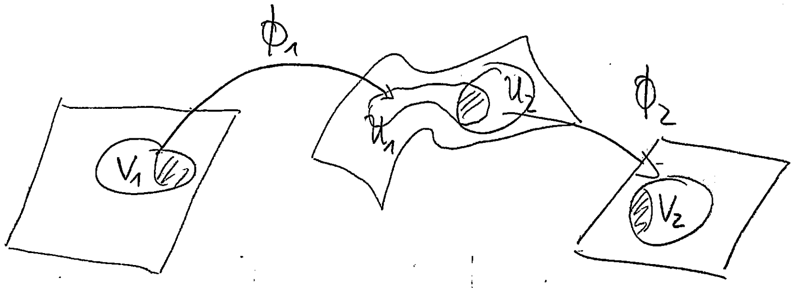


Vorsicht: Hier nennt man häufig Φ^{-1} Karte.

Beispiel topologischer MF im $\mathbb{R}^n$:



Differenzierbare MF sind top. MF mit maximalem $\mathcal{C}^\alpha$-diff.baren Atlas $\mathcal{D}(A)$



Forderung für je 2 überlappende Karten ϕ_1, ϕ_2

$$\phi_2^{-1} \circ \phi_1 \in \mathcal{C}^\alpha$$

Maximal = Atlas enthält alle Karten, die mit Karten aus A diff.bar wechseln.