Satz $v \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig

Dann sind äquivalent: 1. $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ für alle $j,k \in \{1..n\}$

2. $\exists f \in C^2(U)$: $v = \nabla f$

Bem: Dieses Lemma von Poincaré bleibt gültig für einfach zusammenhängende offene $U \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: 2. ⇒ 1. Lemma S. 80

1. ⇒ 2. Sei $x_0 \in U$ der ausgezeichnete Pkt und setze $f(x) := \int_0^1 \langle v(x_0 + t(x-x_0)), x - x_0 \rangle \, dt$, $x \in U$.

Dann gilt $f \in C^1(U)$ mit:

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \partial_j \sum_{k=1}^n v_k(x_0+t(x-x_0))(x_k - x_{0k}) \, dt$$

Prod. regel

$$\overset{?}{=} \int_0^1 \sum_k \Big[(\partial_j v_k)(x_0+t(x-x_0)) \, t(x_k - x_{0,k}) + v_k(x_0+t(x-x_0)) \underbrace{\partial_j (x_k - x_{0,k})}_{=\delta_{jk}} \Big] dt$$

$\partial_j v_k = \partial_k v_j$

$$\overset{?}{=} \int_0^1 \Big[t \underbrace{\langle x - x_0, \nabla v_j(x_0+t(x-x_0)) \rangle}_{= \frac{d}{dt} v_j(x_0+t(x-x_0))} + v_j(x_0+t(x-x_0)) \Big] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \big[t \, v_j(x_0+t(x-x_0)) \big] dt = v_j(x) \qquad \square$$

Ausblick:

Die Existenz von rotationsfreien VF, die keine Gradientenfelder sind, hängt mit den topologischen Eigenschaften des Gebiets U zusammen. Der Quotientenraum

$$H^1(U) := \{ v: U \to \mathbb{R}^n \mid \operatorname{rot} v = 0 \} \big/ \{ v: U \to \mathbb{R}^n \mid \exists f: v = \nabla f \}$$

heißt erste de Rhamsche Kohomologiegruppe.

Bsp (vgl. S. 87) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$

$$H^1(U) \cong \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -(x-a_j)_2 / |x-a_j|^2 \\ (x-a_j)_1 / |x-a_j|^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; j = 1..k \right\}$$

$$\dim H^1(U) = k$$