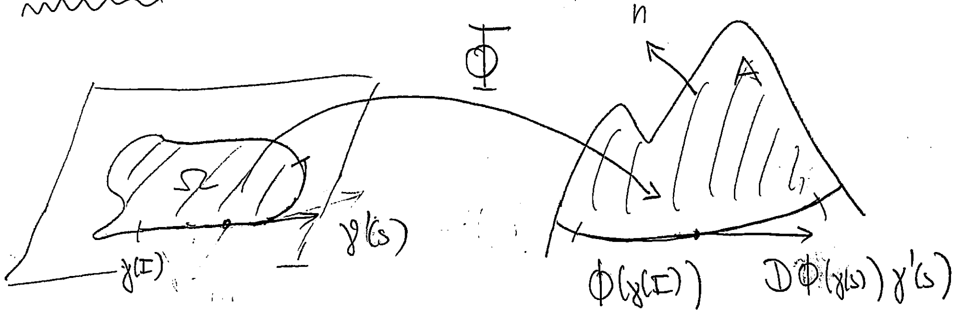
Aus Def. der adjungierten Matrix $(\cdot)^T$ folgt die explizite Form des Pullbacks von v, A:

1. $\phi^* v(x) = D\phi(x)^T v(\phi(x))$
2. $\phi^* A(x) = D\phi(x)^T A \, D\phi(x)$, $x \in V$

Beispiel: Situation wie im Satz v. Stokes im $\mathbb{R}^3$



Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ Kurve, welche $\partial\Omega$ lokal parametrisiert und somit $\phi\circ\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ Kurve, welche $\partial A = \phi(\partial\Omega)$ lokal parametrisiert.

Dann gilt für VF $v: M \to \mathbb{R}^3$

$$(*) \quad \boxed{\langle \phi^* v(\gamma(s)), \underbrace{\gamma'(s)}_{\substack{\text{Tangential an } \partial\Omega \\ \text{in } x = \gamma(s)}} \rangle = \langle v(\phi(\gamma(s))), \underbrace{D\phi(\gamma(s))\,\gamma'(s)}_{\substack{\text{Tangential an } \partial A \\ \text{in } y = \phi(x)}} \rangle}$$

Lemma: $\hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{U} \subset \hat{\mathcal{U}}$, $\phi \in C^2(V, \mathcal{U})$ und $f \in C^1(\hat{\mathcal{U}})$, $v \in C^1(\hat{\mathcal{U}}, \mathbb{R}^n)$:

1. $\Phi^*(\nabla f) = \nabla \phi^* f$
2. $\Phi^*(Dv - Dv^T) = D\phi^* v - (D\phi^* v)^T$

(d.h. $\phi^* \operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \phi^* v$)

Beweis: 1. Übung.

2. $[\text{l.S.}(x)]_{jk} = [D\phi(x)^T Dv(\phi(x)) D\phi(x)]_{jk} - [\ldots]_{kj}$

$$= \sum_{l,m} \partial_j \phi_l(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_k \phi_m(x) - (k \leftrightarrow j)$$

$$[\text{r.S.}(x)]_{jk} = \partial_j \left[D\phi(x)^T v(\phi(x))\right]_k - \partial_k \left[D\phi(x)^T v(\phi(x))\right]_j$$

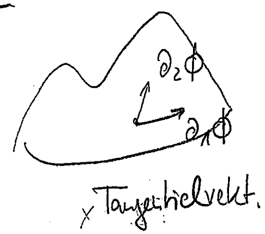
$$= \sum_m \partial_j \left[\partial_k \phi_m(x)\, v_m(\phi(x))\right] - \sum \partial_k \left[\partial_j \phi_m(x)\, v_m(\phi(x))\right]$$

Prod.+ Kettenregel + $\partial_j\partial_k\phi = \partial_k\partial_j\phi$

$$= \sum_{l,m} \left[\partial_k \phi_m(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_j \phi_l(x) - \partial_j \phi_m(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_k \phi_l(x)\right]$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Beweis des Satzes von Stokes im $\mathbb{R}^3$:



Orientierung n auf A:

$$n(\phi(x)) = \pm \frac{\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)}{|\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)|}$$

O.B.d.A. positives Vorzeichen!

$$\Rightarrow \quad \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), n(\phi(x))\rangle \, |\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)|$$

$$= \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), \partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)\rangle$$

Lemma S. 73

$$= \langle [Dv(\phi(x)) - Dv(\phi(x))^T]\underbrace{\partial_1\phi(x)}_{=D\phi(x)e_1}, \underbrace{\partial_2\phi(x)}_{=D\phi(x)e_2}\rangle$$

Def d. Pullback

$$= \langle \phi^*[Dv - (Dv)^T]e_1, e_2\rangle$$

$$= \langle [D\phi^*v - (D\phi^*v)^T]e_1, e_2\rangle$$

Rotation im $\mathbb{R}^2$

$$= \partial_1(\phi^*v)_2(x) - \partial_2(\phi^*v)_1(x).$$

Einsetzen in l.S.:

Gramsche Det.:

$$= \sqrt{\det D\phi(x)^T D\phi(x)}$$

$$= \sqrt{|\partial_1\phi|^2|\partial_2\phi|^2 - \langle\partial_1\phi,\partial_2\phi\rangle^2}$$

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(y), n(y)\rangle \, dS(y)$$

$$= \int_\Omega \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), n(\phi(x))\rangle \, \overbrace{|\partial_1\phi(x)\times\partial_2\phi(x)|}\, dx$$

$$= \int_\Omega \left(\partial_1(\phi^*v)_2(x) - \partial_2(\phi^*v)_1(x)\right) dx$$

Stokes im $\mathbb{R}^2$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle \phi^*v, t\rangle \, dS$$

Tangentialvektor $\tau(\phi(x)) = \dfrac{D\phi(x)t(x)}{|D\phi(x)t(x)|}$ (vgl. S. 75!)

$$\int_{\partial A}\langle v, d\tau\rangle = \int_{\phi(\partial\Omega)} \langle v, \tau\rangle \, d\tilde{S}$$

← Oberflächenmaß auf ∂A, $d\tilde{S} = |D\phi(x)t(x)|\, dS$

Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle v(\phi(x)), \frac{D\phi(x)t(x)}{|D\phi(x)t(x)|}\right\rangle |D\phi(x)t(x)| \, dS$$

Def. Pullback

$$= \int_{\partial\Omega} \langle \phi^*v, t\rangle \, dS \qquad \square$$

V. Integrabilität von Vektorfeldern

Ziel: · Erläuterung und Äquivalenz der folgenden Begriffe

a) Existenz eines Potentials $v = \nabla f$

b) Konservatives Vektorfeld

c) Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals $\int_{\mathcal{C}} \langle v, dx \rangle$

· Integrabilität und Lemma von Poincaré

V. 1. Gradientenfelder

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, von der Form

$$v = \nabla f \qquad \text{mit } f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$$

heißen Gradientenfelder mit Potential f.

Sprechweise aus der Physik – wichtige Bspe:

v Kraftfeld z.B. elektrische Feld

f Potential — " — Pot.

Frage: Ist jedes Vektorfeld ein Gradientenfeld?

Fall $n = 1$: Ja, denn Stammfkt f von v erfüllt $v = f'$.

Fall $n \geq 2$: Nein! Gegenspiel unten

Lemma: Für $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = \nabla f$ gilt für alle $j, k \in \{1, .., n\}$: $\boxed{\partial_j v_k = \partial_k v_j}$ (*)

Beweis: Lemma von Schwarz $\square$

Bem: Integrabilitätbedingung (*) für

$n = 2$: $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \operatorname{rot} v = 0$

$n = 3$: $\operatorname{rot} v = 0$

Bsp: $v(x) = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $x \in \mathbb{R}^2$

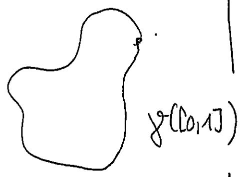
$\operatorname{rot} v = a_{21} - a_{12} \neq 0$ für $A^T \neq A$.

$\Rightarrow$ kein Gradientenfeld!

2. Konservative Vektorfelder und Wegunabhängigkeit

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U,\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißen konservativ, falls für alle stückweise stetig diff'baren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle = 0$$



Gradientenfelder sind konservativ. Dies folgt aus der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals:

Lemma: $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [0,1] \to U$ stückweise stetig diff.bar. Dann:

$$\int_\gamma \langle \nabla f(x), dx \rangle = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Beweis: o.B.d.A nur für $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1],U)$

$$\text{l.S.} = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \, ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) \, ds$$

$$= \text{r.S.} \qquad \square$$

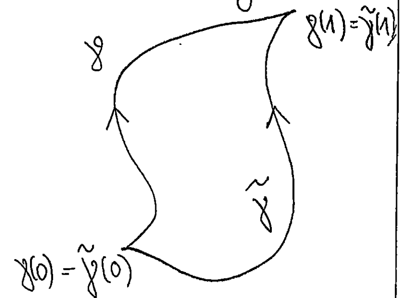
Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals und der Existenz eines Potentials.

Satz. Für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U,\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

1. v ist konservativ
2. v ist Gradientenfeld
3. Für alle stückweise stetig diffbaren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ hängt $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle$ nur von den Endpunkten ab.

Beweis: 2. $\Rightarrow$ 1. Lemma S. 81

1. $\Rightarrow$ 3. Seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ stückweise stetig diffbar mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$



Betrachte $\hat{\gamma} : [0,1] \to U$

$$\hat{\gamma}(s) := \begin{cases} \gamma(2s), & s \in [0,\frac{1}{2}] \\ \tilde{\gamma}(2(1-s)), & s \in (\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

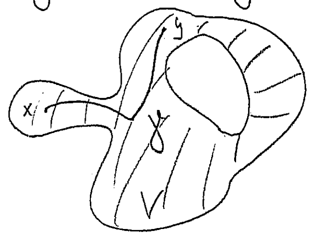
Dann ist $\hat{\gamma}$ stückweise stetig diffbar mit $\hat{\gamma}(0) = \hat{\gamma}(1)$.

Somit: $0 = \int_{\hat{\gamma}} \langle v(x), dx \rangle = \int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle - \int_{\tilde{\gamma}} \langle v(x), dx \rangle$.

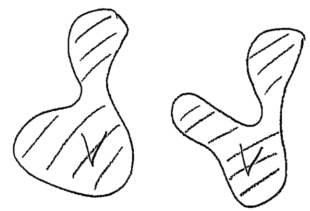
Zum Beweis von 3. ⇒ 2. benötigen wir:

> **Def:** $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x, y \in V$ eine stetige Kurve $\gamma: [0,1] \to V$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Wegzusammenhängend



Nicht wegzusammenhängend



Bem: $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, falls es wegzusammenhängend ist und jede stetige Kurve $\gamma: [0,1] \to V$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ stetig in die Konst. Kurve $\gamma(0)$ deformiert werden kann; d.h. $\exists\, H: [0,1]^2 \to V$ stetig mit $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = H(0,t) = H(1,t) = \gamma(0)$.

Wir benötigen:

> **Lemma:** $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, wegzusammenhängend ⇒
> $\forall x, y \in V\ \exists$ stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma: [0,1] \to V$
> $$\gamma(0) = x \quad \gamma(1) = y$$

Beweis: Sei $\tilde{\gamma}: [0,1] \to V$ stetige Kurve mit $\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(1) = y$.

- Für $n \in \mathbb{N}$ definiere lineare Interpolation der Punkte $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(\frac{1}{n}), \tilde{\gamma}(\frac{2}{n}), \dots \tilde{\gamma}(1)$, d.h. Polygonzug

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k)\left(\tilde{\gamma}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \tilde{\gamma}\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

für $\frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}$.

Da $\tilde{\gamma}$ gleichmäßig stetig, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon)$ so daß für alle $t \in [0,1]$: $|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \varepsilon$.

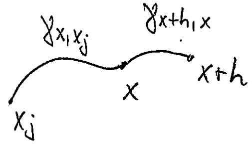
- Da $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und V offen gibt es $\varepsilon > 0$ so daß $D_\varepsilon(\tilde{\gamma}) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(\tilde{\gamma}[0,1], x) < \varepsilon\} \subset V$

Für dieses $n(\varepsilon)$ ist die stückweise stetig diff.bare Kurve γ ganz in V. □

Jede offene Menge $U\subset\mathbb{R}^n$ zerfällt in wegzusammenhängende offene $U_j\subset\mathbb{R}^n$, $j\in J$, d.h. $U=\bigcup_{j\in J}U_j$.

3. $\Rightarrow$ 2. Sei $x_j\in U$ und $U_j\ni x_j$ Zusammenhangskomponente. Für $x\in U_j$ gibt es stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma_{x,x_j}:[0,1]\to U_j$ mit $\gamma(0)=x_j$, $\gamma(1)=x$. Setze

$$f_j(x):=\int_{\gamma_{x,x_j}}\langle v(y),dy\rangle$$



(hängt für festes x_j nur von x ab!) Für hinreichend kleine $|h|$ ist $x+h\in U_j$ und es gilt

$$\frac{f(x+h)-f(x)-\langle v(x),h\rangle}{|h|}=\frac{1}{|h|}\left(\int_{\gamma_{x+h,x}}\langle v(y),dy\rangle-\langle v(x),h\rangle\right)$$

$$=\frac{1}{|h|}\left(\int_0^1\langle v(\gamma_{x+h,x}(s))-v(x),\ \gamma'_{x+h,x}(s)\rangle\,ds\right)$$

$$\xrightarrow{h\to 0}0,$$ da v stetig!

Somit $\nabla f_j(x)=v(x)$ auf allen Zusammenhangskomp. □

V.3. Lemma von Poincaré

Ist die Integrabilitätsbedingung (*) auf S. 80 hinreichend für Konservativität von v? Nein!

Beispiel: Magnetfeld eines Linienstroms entlang x_3-Achse

$$v(x)=\begin{pmatrix}-x_2/(x_1^2+x_2^2)\\ x_1/(x_1^2+x_2^2)\\ 0\end{pmatrix},\quad x\in\mathbb{R}^3\setminus\{x\in\mathbb{R}^3\mid x_1=x_2=0\}$$

$$\operatorname{rot}v(x)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \dfrac{x_1^2+x_2^2-2x_1^2+x_1^2+x_2^2-2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\end{pmatrix}=0$$

Aber: v ist nicht konservativ, z.B. $\gamma:[0,2\pi]\to\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}$

$$\int_\gamma\langle v(x),dx\rangle=\int_0^{2\pi}\left\langle\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle dt=2\pi$$

Def: $U\subset\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es ein $x_0\in U$ gibt so daß für alle $x\in U$ und alle $t\in[0,1]$:

$$x_0+t(x-x_0)\in U$$