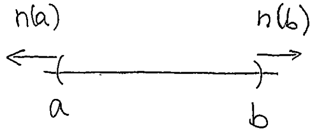
2. Spezialfall $n=1$: HDI



$v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $\qquad \operatorname{div} v(x) = v'(x)$

$$\int_{(a,b)} v'(x)\,dx = v(b) - v(a) = \int_{\partial(a,b)} \langle v(y), n(y)\rangle \, dS(y)$$

3. Erweiterung auf Ω's mit Ecken/Kanten 8

anschauliche Begründung

Würfel $\quad Q = (a,b)^n \subset \mathbb{R}^n$

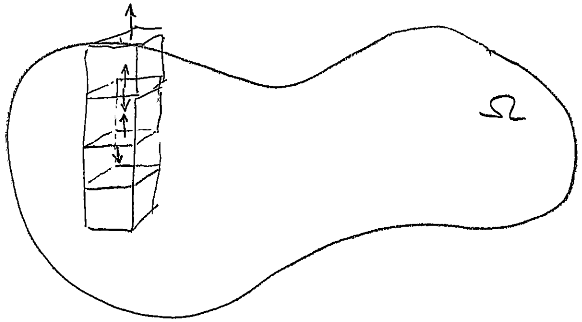
$$\int_Q \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)\,dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} \Bigg(\underbrace{\int_a^b \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x',x_n)\,dx_n}_{= v_n(x',b) - v_n(x',a)} \Bigg) dx'$$

$$= \int_{(a,b)^{n-1}\times\{b\}} v_n(y)\cdot n_n(y)\,dS(y) + \int_{(a,b)^{n-1}\times\{a\}} v_n(y)\,n_n(y)\,dS(y)$$

Analog für $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$, $j = 1,\dots,n-1$. Somit:

$$\boxed{\int_Q \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_{\partial Q} \langle v(y), n(y)\rangle\,dS(y)}$$

Heuristisches Argument für Satz von Gauß



Pflasterung von Ω durch kleine Würfel Q_j

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\,dx \approx \sum_j \int_{Q_j} \operatorname{div} v(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Gauß für Würfel}}{=} \sum_j \int_{\partial Q_j} \langle v(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

$$\approx \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

Flüsse benachbarter Würfel heben sich weg!

Nur Oberflächenterme bleiben übrig!

III. 4. Greensche Formeln

Wichtige Rechenregeln für mehrdim. Integrale sind Folgerungen des Gaußschen Satzes:

Lemma: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand. $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$ mit $\bar{\Omega} \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\forall j = 1, \dots, n$:

$$\boxed{\int_\Omega (\partial_j f)\, g \, dx = \int_{\partial\Omega} f g \, n_j \, dS - \int_\Omega f \, \partial_j g \, dx}$$

("Partielle Integration")

Beweis: Satz von Gauß für $v(x) = f(x) g(x)\, e_j$

$$\operatorname{div} v(x) = (\partial_j f)(x)\, g(x) + f(x) (\partial_j g)(x)$$

Integration über Ω & Anwenden von Gauß liefert die Behauptung $\square$

Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand und $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, $g \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U})$ mit $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\bar{\Omega} \subset \mathcal{U}$.

1. $$\boxed{\int_\Omega f \Delta g \, dx = - \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \, \partial_n g \, dS}$$

("1. Greensche Formel")

wobei $\partial_n g(x) := \langle \nabla g(x), n(x) \rangle$ die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normale bez.

2. $$\boxed{\int_\Omega \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n g \, dS}$$ ("2. Greensche Formel")

Beweis: Übung.

Anwendung in der Theorie partieller Diff.gleichungen:

Greensche Funktion der Laplacegleichung im $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{G(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(2-n)\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\,\dfrac{1}{|x|^{n-2}}, & n \neq 2 \\[2mm] \dfrac{1}{2\pi}\log|x| & n = 2 \end{cases}}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt (vgl. Übung)

$$\nabla G(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\,\frac{x}{|x|^n}, \qquad \Delta G(x) = 0.$$

Satz: Sei $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit kpt Träger. Dann def.

$$\Phi(x) = \int G(x-y)\,\rho(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

eine Funktion $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\boxed{\Delta\phi = \rho}$

Beweisskizze: Die Fkt. $y \to G(x-y)\rho(y)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ int.bar. Nach Substitution:

$$\phi(x) = \int \rho(x-y)\,G(y)\,dy$$

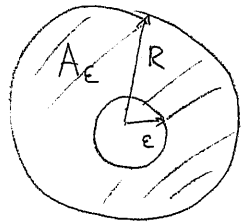
Mit dem Satz v. majorisierten Konvergenz folgt

$$\partial_j\partial_k \Phi(x) = \int (\partial_j\partial_k\rho)(x-y)\,G(y)\,dy \qquad j,k = 1,\dots,n$$

und $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere:

$$\Delta\phi(x) = \int (\Delta\rho)(x-y)\,G(y)\,dy = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\,G(y)\,dy$$

wobei $A_\varepsilon := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varepsilon < |y| < R\}$ mit R groß genug, so daß $\rho(x-y) = 0 \;\forall\, |y| > R/2$.



Da A_ε offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand

$$\partial A_\varepsilon = \partial B_R(0) \cup \partial B_\varepsilon(0)$$

und $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $G \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus B_{\varepsilon/2}(0))$ folgt aus der 1. Greenschen Formel:

$$\int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\,G(y)\,dy - \int_{A_\varepsilon} \rho(x-y)\,\underbrace{\Delta G(y)}_{=0}\,dy$$

$$= \int_{\partial A_\varepsilon} \Big[G(y)\,\langle n(y), \nabla_y \rho(x-y)\rangle - \rho(x-y)\,\langle n(y), \nabla G(y)\rangle \Big]\,dS(y)$$

1. Beiträge von $\partial B_R(0)$ verschwinden, da $\varrho(x-y)=0$ und $\nabla_y \varrho(x-y)=0$ für alle $y\in\partial B_R(0)$.

2. Beiträge von $\partial B_\varepsilon(0)$:

i) $$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \sigma(y)\,\langle n(y), \nabla_y \varrho(x-y)\rangle\, dS(y)\right| \le \sup_{|y|=\varepsilon} |\nabla_y \varrho(x-y)| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\sigma(y)|\, dS(y)$$

$$\le \underbrace{\sup_{|y|\le 1} |\nabla_y \varrho(x-y)|}_{=:C(x)} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{|2-n|\ \mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\ \dfrac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_\varepsilon(0))}{\varepsilon^{n-2}} & ; n\neq 2 \\ \dfrac{1}{2\pi}\,|\log\varepsilon|\ 4\pi\varepsilon & ; n=2 \end{cases}$$

$$= C(x)\begin{Bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{|2-n|} & ; n\neq 2 \\ 2\varepsilon|\log\varepsilon| & , n=2 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0 .$$

ii) $$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varrho(x-y)\,\underbrace{\langle n(y), \nabla\sigma(y)\rangle}_{=\langle -\frac{y}{|y|}, \frac{y}{|y|^n}\rangle \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}}\, dS(y) = -\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \frac{\varrho(x-y)}{|y|^{n-1}}\, dS(y)$$

Skalierung

$$= -\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \int_{\partial B_1(0)} \varrho(x-\varepsilon y)\, dS(y)$$

$$= (*)$$

Satz von Taylor:

$$\varrho(x-\varepsilon y) = \varrho(x) + O(\varepsilon)$$

Somit $(*) = -\varrho(x) + O(\varepsilon)$

Aus 1. und 2. i) + ii) folgt für alle $x\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} (\Delta\varrho)(x-y)\,\sigma(y)\, dy = \varrho(x) .$$

$\square$