Lemma: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Ist $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ kompakt, dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = 0$$

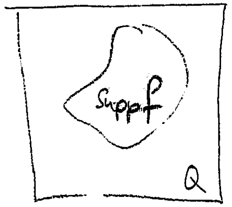
Bem: Insbesondere gilt für $V \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit

kpt Träger in Ω: $\int_\Omega \operatorname{div} V(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega \partial_j V_j(x)\, dx = 0$.

Beweis: Sei $Q := (a,b)^n$ Würfel mit $\operatorname{supp} f \subset Q$.

Setze f durch 0 auf $\mathbb{R}^n$ fort.

Dann gilt: $f = 0$ auf ∂Q



$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} \left(\int_{(a,b)} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n \right) dx'$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} 0 \, dx' = 0$$

Analog: $j = 1, \dots, n-1$. $\square$

Lemma: In der Situation von S.45, d.h.

$W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt, $h \in \mathcal{C}^1(W, (\alpha,\beta))$

$M = \operatorname{Graph} h$, $\Omega = \{(x', x_n) \in W \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x') \wedge x_n \in (\alpha,\beta)\}$,

gilt für alle $V \in \mathcal{C}^1(W \times (\alpha,\beta), \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} V_j$ kompakte

Teilmenge von $W \times (\alpha,\beta)$ für alle $j \in \{1 \dots n\}$:

$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x)\, dx = \int_M \langle V(y), n(y) \rangle \, dS(y)$$

Beweis: $\operatorname{div} V(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(x)$

1. $$\int_\Omega \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(x)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_W \Bigg(\underbrace{\int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial V_n}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n}_{=: V_n(x', h(x'))} \Bigg) dx'$$

$$= \int_W \underbrace{V_n(x', h(x')) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}}_{\overset{\text{vgl. S.45}}{=} V_n(h(x')) \cdot n_n(h(x'))} \underbrace{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx'}_{\text{Oberflächenmaß } dS \text{ auf } M \text{ vgl. S.36}}$$

$$= \int_M V_n(y)\, n_n(y)\, dS(y).$$

2. Wir zeigen:

$$\forall j=1,\dots,n-1: \quad \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_M v_j(y)\,n_j(y)\,dS(y);$$

Betrachte $g(x') := \int_\alpha^{h(x')} v_j(x', x_n)\,dx_n$, $x' \in W$. Dann:

i) supp g ist kpt Teilmenge von W

ii) Parameterdifferentiation:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x') = v_j(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x', x_n)\,dx_n$$

Also Lemma S.47 mit i) + ii)

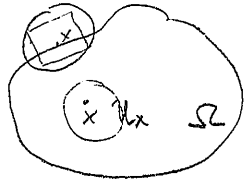
$$0 = \int_W \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')\,dx' = \underbrace{\int_W v_j(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')\,dx'}_{(*)} + \underbrace{\int_W \int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x', x_n)\,dx_n\,dx'}_{= \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx}$$

$$(*) = -\int_W v_j(x', h(x'))\,\underbrace{\frac{-\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')}{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}}}_{\text{äuß. Normale } n_j}\,\underbrace{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}\,dx'}_{\text{Oberflächenmaß } dS \text{ auf } M}$$

$$= -\int_M v_j(y)\,n_j(y)\,dS(y) + \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx \qquad \square$$

Aus 1. + 2. $\Rightarrow$ Beh.

Beweis des Gaußschen Satzes



Für alle $x \in \Omega$ wähle offene Umgebung $U_x \subset \Omega$

Für alle $x \in \partial\Omega$ wähle offene Umgebung $\tilde{U}_x \subset U$ und $f \in C^1(\tilde{U}_x)$ mit $\nabla f \neq 0$ und

$$\partial\Omega \cap \tilde{U}_x = \{\xi \in U_x \mid f(\xi) = 0\}, \quad \Omega \cap \tilde{U}_x = \{\xi \in U_x \mid f(\xi) < 0\}$$

Nach Satz über implizite Fkt. existiert $W_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I_x \subset \mathbb{R}$ und $h_x \in C^1(W_x, I_x)$ mit $U_x := W_x \times I_x \subset \tilde{U}_x$

$$\partial\Omega \cap U_x = \{\xi \in U_x \mid \xi_n = h_x(\xi')\}, \quad \Omega \cap U_x = \{\xi \in U_x \mid \xi_n < h_x(\xi')\};$$

oder > …

Dann ist $(U_x)_{x \in \overline{\Omega}}$ offene Überdeckung von $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Da $\overline{\Omega}$ abgeschlossen & beschränkt im $\mathbb{R}^n$, also kpt ist, gibt es eine endl. Teilüberdeckung $(U_{x_j})_{j=1,\dots,N}$.

Sei $(\chi_j)_{j=1}^N$ zugehörige C^∞-Zerlegung der Eins.

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}\Big(\sum_j X_j v\Big)(x)\,dx = \sum_j \int_\Omega \operatorname{div}(X_j v)(x)\,dx$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\Omega} \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(X_j v)(x)\,dx}_{=0 \ \text{Lemma S.47}} + \sum_{j:\, x_j \in\partial\Omega} \int_\Omega \operatorname{div}(X_j v)(x)\,dx$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega}\int_{U_{x_j}} \operatorname{div}(X_j v)(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Lemma S.48}}{=} \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega}\int_{U_{x_j}\cap\partial\Omega} \langle X_j v(y), n(y)\rangle\, dS(y)$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\langle X_j v(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega}\langle v(y),n(y)\rangle\,dS(y)$$

$\sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} X_j = 1$ auf $\partial\Omega$, da für $x_j\notin\partial\Omega$: $\operatorname{supp} X_j \subset U_{x_j}\subset\Omega$

Somit $X_j = 0$ auf $\partial\Omega$.

□

III. 3. Ergänzungen: Interpretation & Anschauung

1. Divergenz als Quellstärke

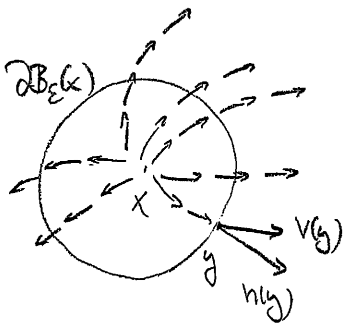
Satz. Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $v\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^n)$ Vektorfeld.

Dann gilt für alle $x\in U$:

$$\operatorname{div} v(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\operatorname{vol}(B_\varepsilon(x))}\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\langle v(y), n(y)\rangle\, dS(y)$$

Beweis: Übung.

Interpretation von $\int_{\partial B_\varepsilon(x)}\langle v(y), n(y)\rangle\, dS(y)$



= Fluß von v durch $\partial B_\varepsilon(x)$ (*)

z.B. v Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit

(*) = # Flüssigkeitsteilchen, die pro Zeiteinheit $B_\varepsilon(x)$ verlassen.

Im Bild. (*) > 0 für alle $\varepsilon > 0 \Rightarrow \operatorname{div} v(x) > 0$

Flußlinien sind divergent!