Satz Sei (M,n) eine 2dim orientierte $\mathcal{C}^2$-UMF im $\mathbb{R}^3$ und $\Phi: V \to \mathcal{U}$ eine Karte von M. Dann gilt für alle $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand, $\overline{\Omega} \subset V$ und alle Vektorfelder $v \in \mathcal{C}^1(\tilde{\mathcal{U}}, \mathbb{R}^3)$, $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\mathcal{U} \subset \tilde{\mathcal{U}}$:

$$\boxed{\int_A \langle \operatorname{rot} v, n\rangle \, dS = \int_{\partial A} \langle v, d\tau\rangle} \qquad (\text{"Stokes im } \mathbb{R}^2\text{"})$$

wobei $A := \Phi(\Omega)$ und τ die auf $\partial A = \Phi(\partial\Omega)$ durch n induzierte Orientierung bezeichnet.

Beispiel: $v(x) = \begin{pmatrix} e^{x_1+2x_2} \\ \log(2+x_2^2) + 2e^{x_1+2x_2} \\ 3x_1x_2x_3 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^3$

$M = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1 - x_1^2 - x_2^2\}$

M in positiver 3-Richtung orientiert, d.h. $n\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$A = M \cap \{x_3 > 0\}$ $\qquad \partial A = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \wedge x_3 = 0\}$

Induzierte Orientierung: $\tau(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

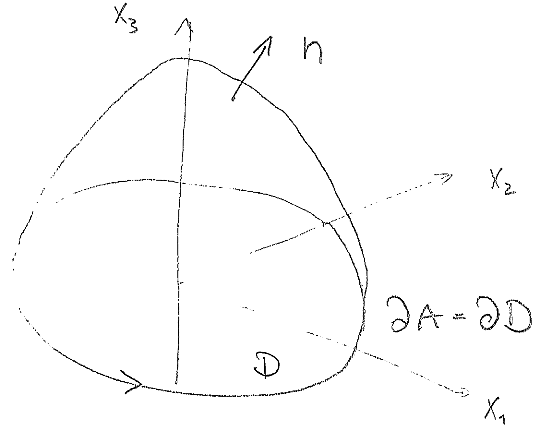
$$\int_A \langle \operatorname{rot} v, n\rangle \, dS \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial A} \langle v, d\tau\rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \int_D \langle \operatorname{rot} v, n\rangle \, dS = (*)$$

wobei $D = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0, \; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Beachte $\partial D = \partial A$. Orientierung auf D: $n = e_3$

Da $(\operatorname{rot} v(x))_3 = \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) = 0$ folgt:

$(*) = 0$.



IV. 4. Rotation eines Vektorfeldes

Def: Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $v: U \to \mathbb{R}^3$ diff.bares Vektorfeld. Die Rotation von v ist das durch

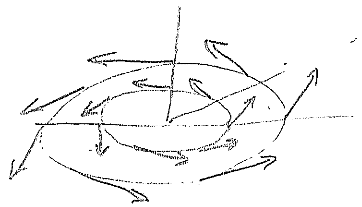
$$\operatorname{rot} v(x) := \begin{pmatrix} \partial_2 v_3(x) - \partial_3 v_2(x) \\ \partial_3 v_1(x) - \partial_1 v_3(x) \\ \partial_1 v_2(x) - \partial_2 v_1(x) \end{pmatrix}$$

definierte Vektorfeld.

Merkregel $\operatorname{rot} v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$

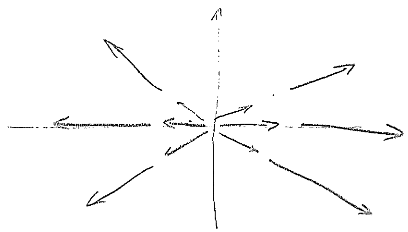
Beispiele: 1. $v(x) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



2. $v(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{rot} v(x) = 0$



Da $v(x) = \nabla\left(\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}\right)$ ist dies Spezialfall von:

Lemma: $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^2(U)$, $v \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$

1. $\operatorname{rot} \nabla f = 0$
2. $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$

Beweis: Übung!

Beobachtung:

$$Dv - (Dv)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 v_1 & \partial_2 v_1 & \partial_3 v_1 \\ \partial_1 v_2 & \partial_2 v_2 & \partial_3 v_2 \\ \partial_1 v_3 & \partial_2 v_3 & \partial_3 v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & & \\ & \dots & \\ & & \end{pmatrix}^T$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2 & \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ -(\dots) & 0 & \partial_3 v_2 - \partial_2 v_3 \\ -(\dots) & -(\dots) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\operatorname{rot} v)_3 & (\operatorname{rot} v)_2 \\ (\operatorname{rot} v)_3 & 0 & -(\operatorname{rot} v)_1 \\ -(\operatorname{rot} v)_2 & (\operatorname{rot} v)_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lemma: Für $a, b \in \mathbb{R}^3$ und $v: U \to \mathbb{R}^3$ diff.bar:

$$\langle \operatorname{rot} v, a \times b \rangle = \langle (Dv - (Dv)^T) a, b \rangle$$

Beweis: Aus den Eigenschaften des Spatprodukts

$$\langle \operatorname{rot} v, a \times b \rangle = \langle b, \operatorname{rot} v \times a \rangle = \langle \operatorname{rot} v \times a, b \rangle$$

Mit obiger Rechnung: $\mathrm{rot}\, v \times a = (Dv - Dv^T)\,a$ □

Allgemeiner gilt für diff.bare VF $v: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen:

$Dv - (Dv)^T$ hat $\frac{n(n-1)}{2}$ unabh. Komponenten

da $\dim \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T = -A \} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Diese Komponenten werden mit $\mathrm{rot}\, v$ identifiziert

Bsp: $n = 2$ $\quad \mathrm{rot}\, v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ ist Skalar.

$n = 4$ $\quad \mathrm{rot}\, v$ hat 6 Komponenten.

Interpretation der Rotation im $\mathbb{R}^3$ als Wirbelstärke

Satz: Sei $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ offen, $v \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^3)$. Dann gilt für alle $x \in \mathcal{U}$ und $n \in \mathbb{R}^3$

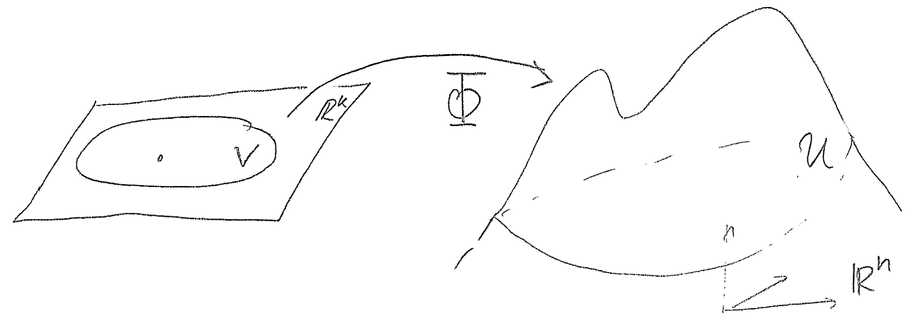
$$\langle \mathrm{rot}\, v(x), n \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\mathrm{Vol}_2 D_\varepsilon(x)} \int_{\partial D_\varepsilon(x)} \langle v, d\tau \rangle$$

wobei $D_\varepsilon(x) := \{ y \in \mathbb{R}^3 \mid |y-x| < \varepsilon \wedge \langle y-x, n\rangle = 0 \}$ und τ die durch n auf $\partial D_\varepsilon(x)$ ind. Orientierung ist

Beweis: Übung.

IV.5. Beweis des Stokeschen Satzes im $\mathbb{R}^3$

$M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF, $\Phi: V \to \mathcal{U}$ Karte von M



$f: M \to \mathbb{R}$ skalare Funktion

$v: M \to \mathbb{R}^n$ VF

$A: M \to \mathbb{R}^{n\times n}$ Matrixfeld

Def: Für obige Situation heißt

$\Phi^* f: V \to \mathbb{R}$, $\Phi^* f(x) := f(\Phi(x))$

$\Phi^* v: V \to \mathbb{R}^k$, $\langle \Phi^* v(x), e \rangle := \langle v(\Phi(x)), D\Phi(x) e \rangle \ \forall e \in \mathbb{R}^k$

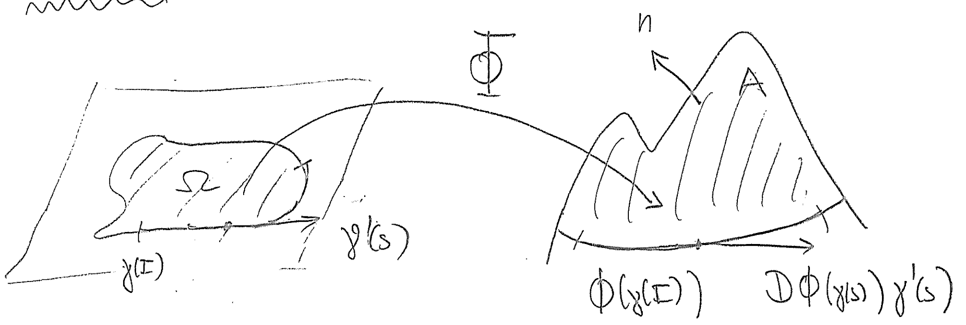
$\Phi^* A: V \to \mathbb{R}^{k\times k}$, $\langle \Phi^* A(x) e, e' \rangle := \langle A(\Phi(x)) D\Phi(x) e, D\Phi(x) e' \rangle \ \forall e, e' \in \mathbb{R}^k$

Pullback von f, v bzw. A.

Aus Def. der adjungierten Matrix $(\cdot)^T$ folgt die explizite Form des Pullbacks von v, A:

1. $\phi^* v(x) = D\phi(x)^T v(\phi(x))$
2. $\phi^* A(x) = D\phi(x)^T A\, D\phi(x)$, $x \in V$

Beispiel: Situation wie im Satz v. Stokes im $\mathbb{R}^3$



Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^2$ Kurve, welche $\partial\Omega$ lokal parametrisiert und somit $\phi\circ\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ Kurve, welche $\partial A = \phi(\partial\Omega)$ lokal parametrisiert. Dann gilt für VF $v: M \to \mathbb{R}^3$:

$$(*) \quad \boxed{\langle \phi^* v(\gamma(s)), \underbrace{\gamma'(s)}_{} \rangle = \langle v(\phi(\gamma(s))), \underbrace{D\phi(\gamma(s))\,\gamma'(s)}_{} \rangle}$$

Tangential an $\partial\Omega$ in $x = \gamma(s)$ —— Tangential an ∂A in $y = \phi(x)$

Lemma: $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, $U \subset \tilde{U}$, $\phi \in C^2(V, U)$ und $f \in C^1(\tilde{U})$, $v \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$:

1. $\Phi^*(\nabla f) = \nabla \phi^* f$
2. $\Phi^*(Dv - Dv^T) = D\phi^* v - (D\phi^* v)^T$

(d.h. $\phi^* \operatorname{rot} v = \operatorname{rot} \phi^* v$)

Beweis: 1. Übung.

2. $[l.S.(x)]_{jk} = [D\phi(x)^T Dv(\phi(x)) D\phi(x)]_{jk} - [\dots]_{kj}$

$$= \sum_{l,m} \partial_j \phi_l(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_k \phi_m(x) - (k \leftrightarrow j)$$

$$[r.S.(x)]_{jk} = \partial_j [D\phi(x)^T v(\phi(x))]_k - \partial_k [D\phi(x)^T v(\phi(x))]_j$$

$$= \sum_m \partial_j [\partial_k \phi_m(x)\, v_m(\phi(x))] - \sum \partial_k [\partial_j \phi_m(x)\, v_m(\phi(x))]$$

Prod.+ Kettenregel + $\partial_j\partial_k\phi = \partial_k\partial_j\phi$

$$= \sum_{l,m} [\partial_k \phi_m(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_j \phi_l(x) - \partial_j \phi_m(x)\, \partial_l v_m(\phi(x))\, \partial_k \phi_l(x)]$$

$\Rightarrow$ Beh. $\square$