IV. Satz von Stokes

Ziele:
- Definition des Kurvenintegrals eines Vektorfelds
- Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$
- — im $\mathbb{R}^3$
- Rotation eines Vektorfelds

IV.1. Kurvenintegrale

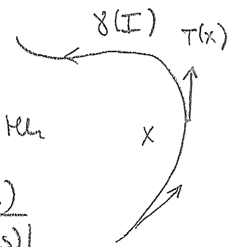
Def: Sei $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall eine stetig differenzierbare Kurve und $v: U \to \mathbb{R}^n$ mit $\gamma(I) \subset U \subset \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle := \int_I \langle v(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

das (orientierte) *Kurvenintegral von v längs γ*.

Bem: 1. Def. läßt sich verallgemeinern auf γ stückweise stetig diffbar und z.B. beschr. VF

2. Ist $\gamma' \neq 0$ und $\gamma: I \to \gamma(I)$ Homöomorphismus, also $\gamma(I)$ 1-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF, dann:



i) induziert γ durch Tangentialvektoren

$$\tau: \gamma(I) \to \mathbb{R}^n, \quad \tau(\gamma(s)) := \frac{\gamma'(s)}{|\gamma'(s)|}$$

eine *Orientierung* auf $\gamma(I)$

ii) *Kurvenintegral* $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle =$

$$= \int_I \langle v(\gamma(s)), \tau(\gamma(s)) \rangle |\gamma'(s)| \, ds = \int_{\gamma(I)} \langle v(y), \tau(y) \rangle \, dS(y)$$

Allgemeiner für 1-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF:

Def: Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ eine 1-dim $\mathcal{C}^1$-UMF

1. Ein stetiges Vektorfeld $\tau: C \to \mathbb{R}^n$ mit $|\tau(p)| = 1$, $\tau(p) \in T_pC$ für alle $p \in C$ heißt *Orientierung* auf C.

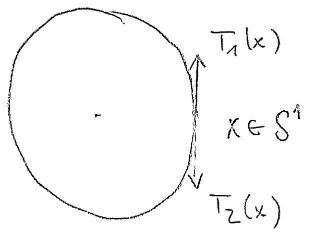
2. Für Orientierung τ und stetiges VF $v: C \to \mathbb{R}^n$ heißt

$$\int_C \langle v, d\tau \rangle := \int_C \langle v(y), \tau(y) \rangle \, dS(y)$$

das *Kurvenintegral* von v über C.

Bem: 1-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF's C werden durch Atlas aus Kurven beschrieben. C besitzt zwei mögliche Orientierungen. Das Vorzeichen des Kurvenintegrals hängt von der Wahl der Orientierung ab.

Bsp: $S^1 \subset \mathbb{R}^2$



Orientierung 1: $\tau_1(x) = \frac{1}{|x|} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

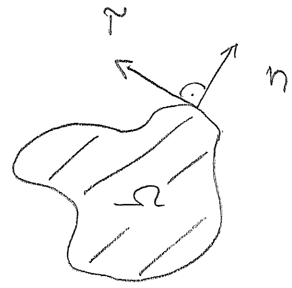
Orientierung 2: $\tau_2(x) = -\tau_1(x)$

IV.2. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$

Satz Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand $\partial\Omega$, welcher mit der Orientierung $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n$ versehen ist, wobei n die äußere Normale bezeichnet. Dann gilt für alle $v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\overline{\Omega} \subset U$:

$$\int_{\partial\Omega} \langle v, d\tau \rangle = \int_\Omega (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \, dx$$

T = Rotation um 90° von τ



„Ω liegt links, wenn $\partial\Omega$ in Richtung τ durchlaufen wird"

Beweis: r.S. $= \int_\Omega \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} dx \overset{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}, n \right\rangle dS$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, n \right\rangle dS = \int \langle v, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n}_{= \tau} \rangle \, dS = \text{l.S.}$$

$\square$

Beispiel Kurvenintegral via Stokes

$$v:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad v(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}\sqrt{1+x_1^2}-x_2e^{x_1x_2}+3x_2\\ x_1^2-x_1e^{x_1x_2}+\log(1+x_2^4)\end{pmatrix}$$

S^1 mit Orientierung T_1 (vgl. S. 63)

$$\int_{S^1}\langle v,d\tau_1\rangle \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{B_1(0)}\left(2x_1-e^{x_1x_2}-x_1x_2e^{x_1x_2}+e^{x_1x_2}+x_1x_2e^{x_1x_2}-3\right)dx$$

$$=\int_{B_1(0)}(2x_1-3)\,dx=-3\int_{B_1(0)}dx$$

$$=-3\pi.$$

Alternative durch Parametrisierung von $S^1\setminus\{\binom{1}{0}\}$

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad t\in(0,2\pi)$$

$$\int_{S^1}\langle v,d\tau_1\rangle=\int_0^{2\pi}\left\langle v(\gamma(t)),\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\rangle dt$$

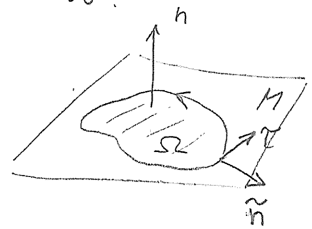
$$=(\text{komplizierte Rechnung})=-3\pi$$

IV.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Satz von Stokes im $\mathbb{R}^2$ liefert als Spezialfall:

- $M=\mathbb{R}^2\subset\mathbb{R}^3$ 2-dim UMF
- $\Omega\subset M$ offen, beschr. mit $\mathcal{C}^1$-Rand
- $v\in\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^3)$, $U\subset\mathbb{R}^3$ offen, $\overline{\Omega}\subset U$.

$$\boxed{\int_{\partial\Omega}\langle v,d\tau\rangle=\int_\Omega\langle \operatorname{rot} v,n\rangle\,dS}$$



wobei $\tau=n\times\tilde{n}$, $n=e_3$, $\tilde{n}$ äußere Normale von Ω in M und

$$\boxed{\operatorname{rot} v(x):=\begin{pmatrix}\partial_2v_3(x)-\partial_3v_2(x)\\ \partial_3v_1(x)-\partial_1v_3(x)\\ \partial_1v_2(x)-\partial_2v_1(x)\end{pmatrix}}$$

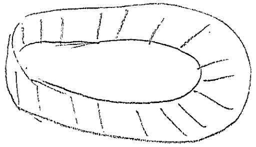
die Rotation von v in $x\in U$ ist.

Ziel: Verallgemeinerung auf 2-dim. UMF $M\subset\mathbb{R}^3$, die wie im obigen Fall orientierbar sind.

Def. Eine $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^\alpha$-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *orientierbar*, falls ein stetiges Vektorfeld $n: M \to \mathbb{R}^n$ mit $|n(p)| = 1$ und $n(p) \in N_pM$ für alle $p \in M$ gibt. Ein solches Vektorfeld n heißt *Orientierung* und das Paar (M, n) eine *orientierte $\mathcal{C}^\alpha$-UMF*.

Bem: Für $n \geq 3$ sind nicht alle $\mathcal{C}^\alpha$-UMF's orientierbar.

Gegenbeispiel: *Möbiusband* $M \subset \mathbb{R}^3$



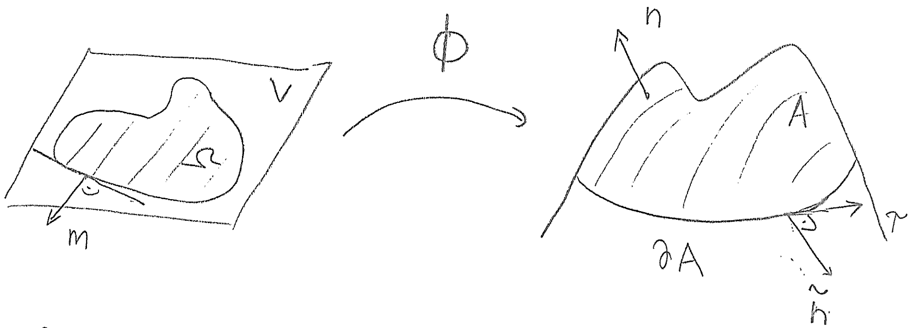
(vgl. Übung)

Im Folgenden: $A := \Phi(\Omega) \subset M \subset \mathbb{R}^3$ mit

- $\Phi: V \to U$ Karte von M
- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt mit $\mathcal{C}^1$-Rand, $\overline{\Omega} \subset V$

Dann gilt: 1. $\partial A = \Phi(\partial \Omega)$ ist 1-dim UMF

2. Auf ∂A gibt es *äußeres Normalen VF*



$\tilde{n}: \partial A \to \mathbb{R}^3$ mit $|\tilde{n}(y)| = 1$, $\tilde{n}(y) \in T_yM$

(Konstruktion analog zu äußeren Normalen VF $m: \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$)

3. Durch n wird auf ∂A via $\tau: \partial A \to \mathbb{R}^3$

$$\boxed{\tau(y) := n(y) \times \tilde{n}(y)}$$

("*rechte Hand Regel*")

eine *induzierte Orientierung* festgelegt.

τ ist eine Orientierung auf ∂A im Sinne von Definition S.63.