$$\int_\Omega \operatorname{div} V(x)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}\Big(\sum_j X_j V\Big)(x)\,dx = \sum_j \int_\Omega \operatorname{div}(X_j V)(x)\,dx$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\Omega} \underbrace{\int_\Omega \operatorname{div}(X_j V)(x)\,dx}_{=0 \text{ Lemma S.47}} + \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} \int_\Omega \operatorname{div}(X_j V)(x)\,dx$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} \int_{U_{x_j}} \operatorname{div}(X_j V)(x)\,dx$$

$$\overset{\text{Lemma S.48}}{=} \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} \int_{U_{x_j}\cap\partial\Omega} \langle X_j V(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

$$= \sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \langle X_j V(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle V(y), n(y)\rangle\,dS(y)$$

$\sum_{j:\, x_j\in\partial\Omega} X_j = 1$ auf $\partial\Omega$, da für $x_j\notin\partial\Omega$: $\operatorname{supp} X_j \subset U_{x_j} \subset \Omega$.

Somit $X_j = 0$ auf $\partial\Omega$.

□

III.3. Ergänzungen: Interpretation & Anschauung

1. Divergenz als Quellstärke

Satz Sei $U\subset\mathbb{R}^n$ offen, $V\in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ Vektorfeld. Dann gilt für alle $x\in U$:

$$\boxed{\operatorname{div} V(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(x))} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \langle V(y), n(y)\rangle\,dS(y)}$$

Beweis: Für $\varepsilon>0$ mit $B_\varepsilon(x)\subset U$ folgt aus Gauß:

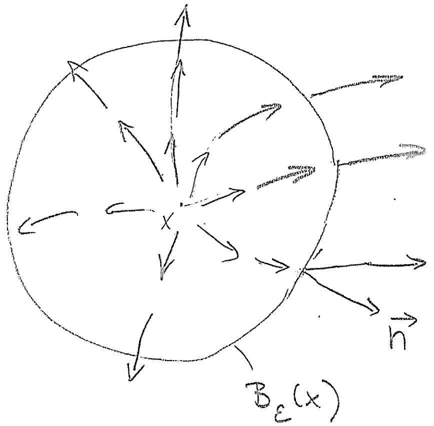
$$\left| \frac{1}{\operatorname{Vol} B_\varepsilon(x)} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} \langle V(y), n(y)\rangle\,dS(y) - \operatorname{div} V(x) \right|$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(x))} \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \big(\operatorname{div} V(y) - \operatorname{div} V(x)\big)\,dy \right|$$

$$\le \sup_{y\in B_\varepsilon(x)} \left| \operatorname{div} V(y) - \operatorname{div} V(x) \right| \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0$$

da $\operatorname{div} V$ stetig □

Interpretation von $\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \langle v(y), n(y)\rangle \, dS(y) = (*)$



z.B. $\vec v$: Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit

$(*) = \#$ Flüssigkeitsteilchen die pro Zeiteinheit $B_\varepsilon(x)$ verlassen.

Sprechweise: $(*) =$ Fluß von v durch $\partial B_\varepsilon(x)$.

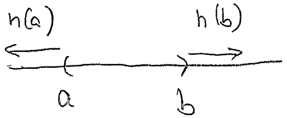
Im Bild: $(*) > 0$ für alle $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ $\operatorname{div} v(x) > 0$

("Flußlinien divergieren!")

2. Spezialfall $n = 1$:

HDI



$\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ $\quad \partial\Omega = \{a,b\}$

Normalen $n(b) = 1$, $n(a) = -1$

dS: Zählmaß

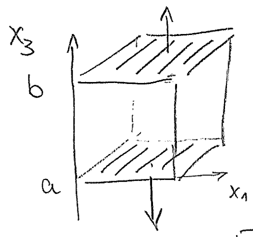
$$\boxed{\int_\Omega v(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y)\rangle \, dS(y)}$$

3. Erweiterung auf Ω's mit Ecken/Kanten & anschauliche Begründung:

Bsp. Würfel $Q = (a,b)^n \subset \mathbb{R}^n$

$$\int_Q \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)\,dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} \underbrace{\left(\int_a^b \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x', x_n)\,dx_n \right)}_{\underset{\text{HDI}}{=} v_n(x',b) - v_n(x',a)} dx'$$

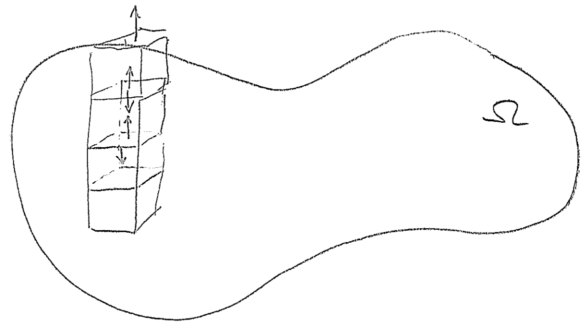
$$= \int_{(a,b)^{n-1}\times\{b\}} v_n(y)\cdot n_n(y)\,dS(y) + \int_{(a,b)^{n-1}\times\{a\}} v_n(y)\, n_n(y)\,dS(y)$$



Analog für $\frac{\partial v_j}{\partial x_j}$ $\quad j = 1, \dots, n-1$

Somit: $$\boxed{\int_Q \operatorname{div} v(x)\,dx = \int_{\partial Q} \langle v(y), n(y)\rangle \, dS(y)}$$

Heuristisches Argument für Satz von Gauß



Pflasterung von Ω durch kleine Würfel Q_j

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx \approx \sum_j \int_{Q_j} \operatorname{div} v(x)\, dx$$

Gauß für Würfel

$$= \sum_j \int_{\partial Q_j} \langle v(y), n(y)\rangle\, dS(y)$$

$$\approx \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y)\rangle\, dS(y)$$

Flüsse benachbarter Würfel heben sich weg!
Nur Oberflächenterme bleiben übrig!

III. 4. Greensche Formeln

Wichtige Rechenregeln für mehrdim. Integrale sind Folgerungen des Gaußschen Satzes:

Lemma: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1-Rand. $f, g \in C^1(U)$ mit $\bar\Omega \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\forall j = 1, \dots, n$:

$$\boxed{\int_\Omega (\partial_j f)\, g\, dx = \int_{\partial\Omega} f g\, n_j\, dS - \int_\Omega f\, \partial_j g\, dx}$$

("Partielle Integration")

Beweis: Satz von Gauß für $v(x) = f(x) g(x) e_j$

$$\operatorname{div} v(x) = (\partial_j f)(x)\, g(x) + f(x) (\partial_j g)(x)$$

Integration über Ω & Anwenden von Gauß liefert die Behauptung $\square$

Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit C^1-Rand und $f \in C^1(U)$, $g \in C^2(U)$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\bar{\Omega} \subset U$.

1. $$\boxed{\int_\Omega f \Delta g \, dx = - \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, dx + \int_{\partial\Omega} f \partial_n g \, dS}$$ ("1. Greensche Formel")

wobei $\partial_n g(x) := \langle \nabla g(x), n(x) \rangle$ die Richtungsableitung in Richtung der äußeren Normale bez.

2. $$\boxed{\int_\Omega \Delta g \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n g \, dS}$$ ("2. Greensche Formel")

Beweis: Übung.

Anwendung in der Theorie partieller Diff.gleichungen:

Greensche Funktion der Laplacegleichung im $\mathbb{R}^n$

$$\boxed{G(x) := \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \frac{1}{|x|^{n-2}}, & n \neq 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x| & n = 2 \end{cases}}$$

Für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt (vgl. Übung)

$$\nabla G(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))} \frac{x}{|x|}, \quad \Delta G(x) = 0.$$

Satz: Sei $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kpt Träger. Dann def.

$$\Phi(x) = \int G(x-y)\rho(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

eine Funktion $\Phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit $\boxed{\Delta\Phi = \rho}$

Beweisskizze: Die Fkt. $y \to G(x-y)\rho(y)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}^n$ int.bar. Nach Substitution:

$$\Phi(x) = \int \rho(x-y)\, G(y)\, dy$$

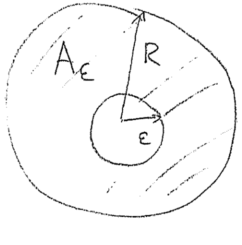
Mit dem Satz v. majorisierten Konvergenz folgt

$$\partial_j\partial_k \Phi(x) = \int (\partial_j\partial_k \rho)(x-y)\, G(y)\, dy \qquad j,k=1,\dots,n$$

und $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Insbesondere:

$$\Delta\phi(x) = \int (\Delta\rho)(x-y)\, G(y)\, dy = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\, G(y)\, dy$$

wobei $A_\varepsilon := \{y\in\mathbb{R}^n \mid \varepsilon<|y|<R\}$ mit R groß genug, so daß $\rho(x-y)=0 \ \forall\, |y|>R/2$.



Da A_ε offen, beschränkt mit C^1-Rand

$$\partial A_\varepsilon = \partial B_R(0) \cup \partial B_\varepsilon(0)$$

und $\rho\in C^2(\mathbb{R}^n)$, $G\in C^2(\mathbb{R}^n\setminus B_{\varepsilon/2}(0))$ folgt aus der 1. Greenschen Formel:

$$\int_{A_\varepsilon} (\Delta\rho)(x-y)\,G(y)\,dy - \int_{A_\varepsilon}\rho(x-y)\underbrace{\Delta G(y)}_{=0}\,dy$$

$$= \int_{\partial A_\varepsilon}\Big[G(y)\,\langle n(y),\nabla_y\rho(x-y)\rangle - \rho(x-y)\,\langle n(y),\nabla G(y)\rangle\Big]\, dS(y)$$

1. Beiträge von $\partial B_R(0)$ verschwinden, da $\rho(x-y)=0$ und $\nabla_y\rho(x-y)=0$ für alle $y\in\partial B_R(0)$.

2. Beiträge von $\partial B_\varepsilon(0)$:

i) $$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} G(y)\,\langle n(y),\nabla_y\rho(x-y)\rangle\, dS(y)\right| \le \sup_{|y|=\varepsilon}|\nabla_y\rho(x-y)| \int_{\partial B_\varepsilon(0)}|G(y)|\,dS(y)$$

$$\le \underbrace{\sup_{|y|\le 1}|\nabla_y\rho(x-y)|}_{=:C(x)} \cdot \begin{cases} \dfrac{1}{|2-n|\,\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\,\dfrac{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_\varepsilon(0))}{\varepsilon^{n-2}}; & n\ne 2 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi}\,|\log\varepsilon|\; 4\pi\varepsilon; & n=2\end{cases}$$

$$= C(x)\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{|2-n|}; & n\ne2\\[1ex] 2\varepsilon\,|\log\varepsilon|, & n=2\end{cases} \xrightarrow{\varepsilon\downarrow0} 0.$$

ii) $$\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \rho(x-y)\,\underbrace{\langle n(y),\nabla G(y)\rangle}_{=\langle -\frac{y}{|y|},\frac{y}{|y|^n}\rangle\cdot\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}}\, dS(y) = -\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\int_{\partial B_\varepsilon(0)}\frac{\rho(x-y)}{|y|^{n-1}}\,dS(y)$$

Skalierung

$$= -\frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(\partial B_1(0))}\int_{\partial B_1(0)}\rho(x-\varepsilon y)\,dS(y)$$

$$= (*)$$

Satz von Taylor:

$$\varrho(x-\varepsilon y) = \varrho(x) + O(\varepsilon)$$

Somit $(*) = -\varrho(x) + O(\varepsilon)$

Aus 1. und 2. i) + ii) folgt für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{A_\varepsilon} (\Delta \varrho)(x-y)\, G(y)\, dy = \varrho(x) .$$

$\square$