**Satz.** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $C^1$-Rand

1. Für alle $p \in \partial\Omega$ gibt es einen eindeutigen Vektor $n(p) \in \mathbb{R}^n$ mit:


   i) $|n(p)| = 1$

   ii) $n(p) \in N_p\partial\Omega$

   iii) $p + \varepsilon n(p) \notin \Omega$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$.

2. Die Abb. $p \to n(p)$ ist stetig.

**Def:** Obiger Vektor heißt äußere Normale an $\partial\Omega$ in $p$.

Beweis des Satzes:

1. Nach Satz S. 16/17: $N_p\partial\Omega = \operatorname{span}\{\nabla f(p)\}$.

Also erfüllt $n(p) = \pm \dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ i) + ii)

Nach Satz von Taylor: $z := \nabla f(p)$

$$f(p+tz) = f(p) + t\,\nabla f(p)\cdot z + o(t)$$
$$= t\,|\nabla f(p)|^2 + o(t)$$



$$\Rightarrow \quad f(p+tz) \begin{cases} > 0 & t > 0 \\ < 0 & t < 0 \end{cases} \quad |t| \text{ klein.}$$

Somit gilt für alle $|t|$ genügend klein:

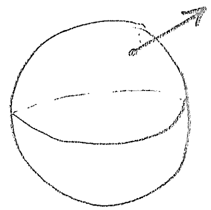
$$p + tz \notin \overline{\Omega} \Leftrightarrow f(p+tz) > 0 \Leftrightarrow t > 0.$$

Also $n(p) = \dfrac{\nabla f(p)}{|\nabla f(p)|}$ ist eindeutige Lösung von i)–iii)

2. Da $f$ stetig diff.bar, folgt $n$ stetig $\square$

**Bsp 1.** $\Omega = B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < 1\}$ hat $C^1$-Rand

$\partial\Omega = \partial B_1(0) = S^2$



Hier: $f(x) = |x|^2 - 1$

$\nabla f(x) = 2x \neq 0$

$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) < 0\}$

$\partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\}$

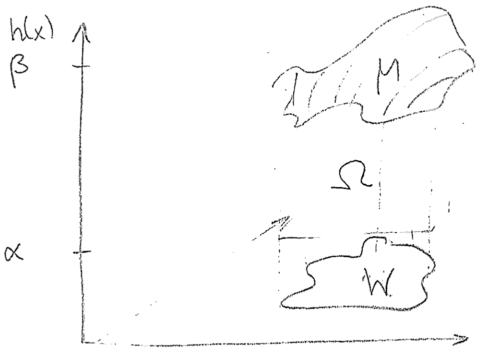
$n(x) = x$.

## 2. Äußere Normale an Graph

$W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen beschränkt, $h \in C^1(W,(\alpha,\beta))$

$M =$ Graph $h$

$\Omega = \{(x',x_n) \in W \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x') \wedge x_n \in (\alpha,\beta)\}$




$\Omega$ hat i. A. keinen $C^1$-Rand. Der obere „Deckel" $M$ ist aber $C^1$-UMF, die durch Funktion $f(x',x_n) = x_n - h(x')$ beschrieben wird:

$$M = \{f = 0\}$$
$$\Omega = \{f < 0\} \cap (\alpha,\beta)$$

Auf $M$ ist $\quad n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla h(x') \\ 1 \end{pmatrix}$

äußere Normale in $x \in M$.



## III.2. Formulierung und Beweis des Gaußschen Satzes

**Satz:** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt mit $C^1$-Rand.

Für Vektorfelder $v \in C^1(U,\mathbb{R}^n)$ mit $\overline{\Omega} \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt:

$$\boxed{\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \langle v(y), n(y) \rangle \, dS(y)}$$

(„Gauß")

wobei $n(y)$ äußere Normale an $\partial\Omega$ in $y$ und

$\operatorname{div} v(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(y)$ die Divergenz von $v$ ist.

Der Beweis gliedert sich in 2 Schritte

1. Spezialfälle: Nullrandwerte, $\Omega$ Graph
2. Überdeckungsargument.

**Lemma:** $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.

Ist $\operatorname{supp} f \subset \Omega$ kompakt, dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

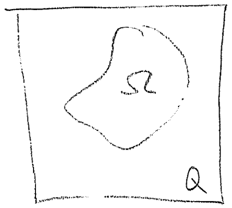
$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx = 0$$

**Bem:** Insbesondere gilt für $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit Kpt Träger in $\Omega$: $\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \partial_j v_j(x)\, dx = 0$.

**Beweis:** Sei $Q := (a,b)^n$ Würfel mit $\operatorname{supp} f \subset Q$.

Setze $f$ durch $0$ auf $\mathbb{R}^n$ fort.

Dann gilt: $f = 0$ auf $\partial Q$




$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx = \int_Q \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} \left( \int_{(a,b)} \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\, dx_n \right) dx'$$

$$\overset{\text{HDI}}{=} \int_{(a,b)^{n-1}} 0\, dx' = 0$$

Analog: $j = 1, \dots, n-1$. $\square$



**Lemma:** In der Situation von S. 45, d.h.

$W \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt, $h \in C^1(W, (\alpha, \beta))$

$M = \operatorname{Graph} h$, $\Omega = \{(x', x_n) \in W \times \mathbb{R} \mid x_n < h(x') \wedge x_n \in (\alpha, \beta)\}$,

gilt für alle $v \in C^1(W \times (\alpha,\beta), \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} f$ kompakte Teilmenge von $W \times (\alpha, \beta)$:

$$\int_\Omega \operatorname{div} v(x)\, dx = \int_M \langle v(y), n(y) \rangle\, dS(y)$$

**Beweis:** $\operatorname{div} v(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)$

1. $$\int_\Omega \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x)\, dx \underset{\text{Fubini}}{=} \int_W \underbrace{\left( \int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial v_n}{\partial x_n}(x', x_n)\, dx_n \right)}_{=: g(x', h(x'))} dx'$$

$$= \int_W \underbrace{g(x', h(x')) \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}}}_{\text{vgl. S.45} = v_n(h(x')) \cdot n_n(h(x'))} \underbrace{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx'}_{\text{Oberflächenmaß } dS \text{ auf } M \text{ vgl. S. 36}}$$

$$= \int_M v_n(y)\, n_n(y)\, dS(y).$$

2. Wir zeigen:

$$\forall j=1,\dots,n-1: \quad \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx = \int_M v_j(y)\,n_j(y)\,dS(y).$$

Betrachte $g(x') := \int_\alpha^{h(x')} v_j(x', x_n)\,dx_n$, $x' \in W$. Dann:

i) supp $g$ ist kpt Teilmenge von $W$

ii) Parameterdifferentiation:

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(x') = v_j(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_j}(x') + \int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x', x_n)\,dx_n$$

Also Lemma S.47 mit i) + ii)

$$0 = \int_W \frac{\partial g}{\partial x_j}(x')\,dx' = \int_W v_j(x', h(x'))\,\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')\,dx' + \underbrace{\int_W \int_\alpha^{h(x')} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x', x_n)\,dx_n\,dx'}_{= \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx}$$

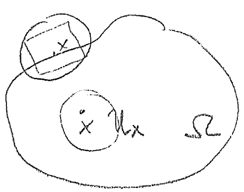
$$= -\int v_j(x', h(x'))\,\underbrace{\frac{-\frac{\partial h}{\partial x_j}(x')}{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}}}_{\text{äuß. Normale } n_j}\,\underbrace{\sqrt{1+|\nabla h(x')|^2}\,dx'}_{\text{Oberflächenmaß } dS \text{ auf } M}$$

$$= -\int_M v_j(y)\,n_j(y)\,dS(y) + \int_\Omega \frac{\partial v_j}{\partial x_j}(x)\,dx$$

Aus 1. + 2. $\Longrightarrow$ Beh. $\square$



**Beweis des Gaußschen Satzes**




Für alle $x \in \Omega$ wähle offene Umgebung $U_x \subset \Omega$

Für alle $x \in \partial\Omega$ wähle offene Umgebung $\tilde{U}_x \subset U$ und $f \in C^1(\tilde{U}_x)$ mit $\nabla f \neq 0$ und

$\partial\Omega \cap \tilde{U}_x = \{\xi \in U_x \mid f(\xi) = 0\}$, $\Omega \cap \tilde{U}_x = \{\xi \in U_x \mid f(\xi) < 0\}$

Nach Satz über implizite Fkt. existiert $W_x \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I_x \subset \mathbb{R}$ und $h_x \in C^1(W_x, I_x)$ mit $U_x := W_x \times I_x \subset \tilde{U}_x$

$\partial\Omega \cap U_x = \{\xi \in U_x \mid \xi_n = h_x(\xi')\}$, $\Omega \cap U_x = \{\xi \in U_x \mid \xi_n < h_x(\xi')\}$

oder > ...

Dann ist $(U_x)_{x \in \bar{\Omega}}$ offene Überdeckung von $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Da $\bar{\Omega}$ abgeschlossen & beschränkt im $\mathbb{R}^n$, also kpt ist, gibt es eine endl. Teilüberdeckung $(U_{x_j})_{j=1,\dots,N}$.

Sei $(\chi_j)_{j=1}^N$ zugehörige $C^\infty$-Zerlegung der Eins.