II.3. Weitere Beispiele & Anwendungen

1. Funktionsgraphen

Sei $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $h \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R})$. Dann ist:

$$\boxed{M := \operatorname{Graph} h := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = \underbrace{h(x_1, \dots, x_{n-1})}_{=:\, x'} \}}$$

eine $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^\alpha$-UMF.

Begr.: Setze $f(x) := h(x') - x_n$ in Satz S 3.

Es gilt: $f \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R})$ und $Df(x) = (D\, h(x'), -1)$

und somit $\operatorname{Rang} Df(x) = 1$ □

Eine Karte ist $\Phi : U \to \Phi(U)$, $\boxed{\Phi(x) = \begin{pmatrix} x' \\ h(x') \end{pmatrix}}$

Begr.: $D\Phi(x') = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} \\ D\, h(x') \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{Rang} D\Phi(x') = n-1$

Neben $\Phi \in \mathcal{C}^\alpha(U, \mathbb{R}^n)$ ist auch $\Phi^{-1}(x', x_n) = x'$ stetig. □

Gramsche Determinante

$$g^\Phi(x') = \det \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} \\ D\, h(x') \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{n-1} \\ D\, h(x') \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(\mathrm{Id}_{n-1} + Dh(x')^T Dh(x') \right)$$

$$= 1 + |\nabla h(x')|^2$$

Lemma: $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $a a^T := \begin{pmatrix} a_1 a_1 & \dots & a_1 a_n \\ & & \\ a_n a_1 & & a_n a_n \end{pmatrix}$

Eigenwerte von $A := 1 + a a^T$: $\quad 1$ $(n-1$-fach$)$, $\quad 1 + |a|^2$ $(1$-fach$)$

Beweis: $Aa = a + |a|^2 a = (1 + |a|^2)\, a$

Für $\langle a, x \rangle = 0$ gilt: $Ax = x$ □

Somit ist bewiesen:

Satz: Ist $h \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen und f eine auf $M = \operatorname{Graph} h$ int.bare Funktion, dann gilt:

$$\int_M f(x)\, dS(x) = \int_U f(x', h(x')) \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}\, dx'$$

2. Transformationsverhalten

Satz: Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. komp. $\mathcal{C}^1$-UMF

1. Dann ist auch $x_0 + rM$ eine k-dim. komp. $\mathcal{C}^1$-UMF.
2. Ist $f: x_0 + rM \to \mathbb{R}$ int.bar, so ist $f(x_0 + r(\cdot))$ auf M int.bar und es gilt:

$$\int_{x_0+rM} f(x)\, dS(x) = r^k \int_M f(x_0+rx)\, dS(x)$$

Beweis: Ist $(\Phi_j : V_j \to U_j)$ Atlas von M, so ist $(x_0 + r\phi_j)$ Atlas von $x_0 + rM$ $\Rightarrow$ 1.

Es gilt: $D(x_0 + r\phi_j) = rD\phi_j$

$$\Rightarrow \quad g^{x_0+r\phi_j} = \det (rD\phi_j)^T (rD\phi_j) = r^{2k} \det D\phi_j^T D\phi_j$$
$$= r^{2k} g^{\phi_j}$$

Somit für jede $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung d. Eins (X_j) bzgl. $(x_0 + rU_j)$:

$$\int_{x_0+rM} f(x)\, dS(x) = \sum_j \int_{x_0+rM} X_j(x) f(x)\, dS(x)$$

$$= \sum_j \int_{V_j} X_j(x_0 + r\phi_j(x))\, f(x_0 + r\phi_j(x)) \sqrt{g^{x_0+r\phi_j}(x)}\, dx$$

$$= \sum_j r^k \int_{V_j} X_j(x_0 + r\phi_j(x))\, f(x_0 + r\phi_j(x)) \sqrt{g^{\phi_j}(x)}\, dx$$

$$= r^k \sum_j \int_{V_j} X_j(x_0 + rx)\, f(x_0 + rx)\, dS(x)$$

$$= r^k \int_M f(x_0 + rx)\, dS(x) \qquad \square$$

Spezialfall: $f = 1_M$: $\mathrm{Vol}_k(x_0 + rM) = r^k \mathrm{Vol}_k(M)$.

3. Faserung in Kugelschalen:

$$B_r^{(n)}(x) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid |x-y| < r \}$$
$$\partial B_r^{(n)}(x) := \{ \quad - \quad \mid |x-y| = r \}$$

Satz: Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist f für fast alle $r \in (0,\infty)$ über $\partial B_r(0)$ int.bar und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(0)} f(x)\, dS(x) \right) dr = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_1(0)} f(rx)\, dS(x) \right) r^{n-1}\, dr$$

Beweis: Betrachte Halbebenen $H_\pm = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \pm x_n > 0 \}$

1. Schritt: Integral über H_+

$$\Phi : B_1^{(n-1)}(0) \times (0,\infty) \to H_+ \,, \quad \Phi(x', r) = \left(r x', r\sqrt{1-|x'|^2}\right)$$

- Φ injektiv, da:

$$\left(r x', r\sqrt{1-|x'|^2}\right) = \left(\tilde r \tilde x', \tilde r \sqrt{1-|\tilde x'|^2}\right) \Rightarrow$$

$$r^2 = r^2|x'|^2 + r^2(1-|x'|^2) = \tilde r^2 |\tilde x'|^2 + \tilde r^2 (1-|\tilde x'|^2) = \tilde r^2$$

d.h. $r = \tilde r$ und somit $x' = \tilde x'$.

- Φ surjektiv, da: für $x = (x', x_n)$ mit $x_n > 0$ gilt:

$$\Phi\left(\frac{x'}{|x|}, |x|\right) = \left(x', |x|\sqrt{1 - \frac{|x'|^2}{|x|^2}}\right) = \left(x', \sqrt{|x|^2 - |x'|^2}\right)$$

$$= \left(x', \sqrt{x_n^2}\right) = x \,.$$

- $\Phi \in \mathcal{C}^1$ mit $D\Phi(x', r) = \begin{pmatrix} r\,\mathrm{Id}_{n-1} & x' \\ r \dfrac{-(x')^T}{\sqrt{1-|x'|^2}} & \sqrt{1-|x'|^2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det D\Phi(x', r) = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|x'|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & x_{n-1} \\ -x_1 & \cdots & -x_{n-1} & 1-|x'|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|x'|^2}} \det \begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & 1 & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|x'|^2}} \neq 0$$

Somit ist Φ ! $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus.

Nach Transformationssatz:

$$\int_{H_+} f(x)\, dx = \int_{B_1^{(n-1)}(0) \times (0,\infty)} f(\Phi(x', r)) \, |\det D\Phi(x', r)| \, d(x', r)$$

$$= \int_{B_1^{(n-1)}(0) \times (0,\infty)} f\left(r x', r\sqrt{1-|x'|^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|x'|^2}} \, d(x', r)$$

$$\overset{\text{Satz von Fubini}}{=} \int_0^\infty \left(\int_{B_1^{(n-1)}(0)} f\left(r x', r\sqrt{1-|x'|^2}\right) \frac{r^{n-1}}{\sqrt{1-|x'|^2}} \, dx' \right) dr$$

Für $h : B_1^{(n-1)}(0) \to \mathbb{R}$, $h(x') = \sqrt{1-|x'|^2}$ gilt:

- $\mathrm{Graph}\, h = \partial B_1(0) \cap H_+$
- $Dh(x') = \dfrac{-(x')^T}{\sqrt{1-|x'|^2}} \Rightarrow 1 + |\nabla h(x')|^2 = \dfrac{1}{1-|x'|^2}$

Sätze S36/37

$$\Longrightarrow \int_{H_+} f(x)\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_1^{(n)}(0) \cap H_+} f(ry)\, r^{n-1}\, dS(y) \right) dr$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r^{(n)}(0) \cap H_+} f(x)\, dS(x) \right) dr$$

<u>2. Schritt:</u> Integral über H_- analog.

<u>3. Schritt:</u> Zusammenfassung:

Da Hyperebene $\{x_n = 0\}$ eine Nullmenge im $\mathbb{R}^n$ ist und $\{x_n = 0\} \cap \partial B_r(0)$ für alle $r > 0$ eine $(n-1)$-dim. Nullmenge ist, folgt:

$$\int f(x)\,dx = \int_{H_+} f(x)\,dx + \int_{H_-} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty \Big[\int_{\partial B_r^{(n)}(0) \cap H_+} f(x)\,dS(x) + \int_{\partial B_r^{(n)}(0) \cap H_-} f(x)\,dS(x) \Big]\,dr$$

$$= \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B_r^{(n)}(0)} f(x)\,dS(x) \Big)\,dr$$

$$\overset{\text{Skalierung}}{=} \int_0^\infty \Big(\int_{\partial B_1^{(n)}(0)} f(ry)\,dS(y) \Big)\, r^{n-1}\,dr \qquad \square$$

Spezialfall $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ rot. symm: $f(x) = \tilde{f}(|x|)$

$$\int f(x)\,dx = \int_0^\infty \int_{\partial B_1^{(n)}(0)} f(ry)\,dS(y)\, r^{n-1}\,dr = \mathrm{Vol}_{n-1}(\partial B_1(0)) \int_0^\infty r^{n-1} \tilde{f}(r)\,dr.$$

III. Satz von Gauß

<u>Ziel.</u> Formulierung & Beweis des HDI in höheren Dimensionen:

Integral über offenes $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$\longleftrightarrow$ Integral über dessen Rand $\partial\Omega$

III.1. Teilmengen mit glattem Rand

<u>Def:</u> Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ besitzt einen <u>C^1-Rand</u> genau dann wenn für alle $p \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ und eine Fkt $f \in C^1(\mathcal{U})$ existiert mit $\nabla f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathcal{U}$ und

$$\partial\Omega \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) = 0\}$$
$$\Omega \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid f(x) < 0\}$$

<u>Bem:</u> 1. Anschaulich: Ω liegt auf einer Seite

2. $\partial\Omega$ ist $(n-1)$-dim. C^1-UMF (Übung!)