$$= \left| \det D\varphi(x) \right| \; g^{\Phi_2}(\varphi(x)))$$

$\det A \cdot B = \det A \;\det B$

Einsetzen liefert Behauptung □

Bsp: $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$, so dass $\gamma(I)$ 1-dim UMF. Dann ist

$$g^{\gamma}(t) = \sqrt{\gamma'(t) \cdot \gamma'(t)} = |\gamma'(t)|$$

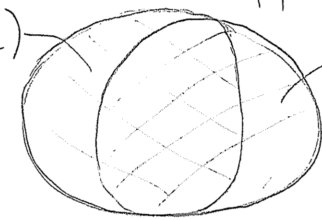
$$L(\gamma) = \int_{\gamma(I)} dS(x) = \int_I |\gamma'(t)| \, dt$$

Länge der Kurve □

Aus der Übung:

Lemma: Für kompakte, k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ gibt es einen endlichen Atlas $(\Phi_1, \ldots \Phi_N)$.

Beweisidee: Satz v. Heine-Borel (Ana 2)



Überdeckung von M durch U_1, U_2.

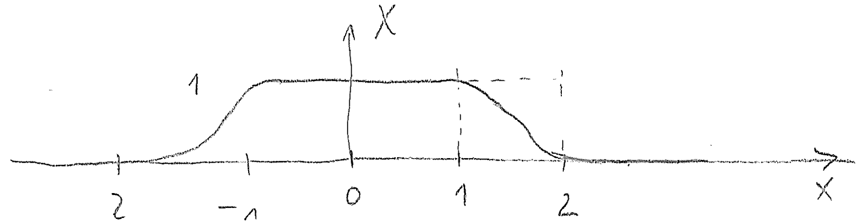
Def: Sei $(U_j)_{j=1,\ldots N}$ eine offene Überdeckung von $M \subset \mathbb{R}^n$. Eine Familie $(\chi_j)_{j=1,\ldots N}$ von Funktionen $\chi_j : M \to \mathbb{R}$ heißt ($\mathcal{C}^\alpha$-) Zerlegung der Eins bzgl. $(U_j)_{j=1,\ldots N}$, wenn

1. $0 \leq \chi_j \leq 1$
2. $\sum_{j=1}^{N} \chi_j(x) = 1$ falls $x \in M$
3. $\operatorname{supp} \chi_j \subset U_j$ (und $\chi_j \in \mathcal{C}^\alpha$)

Bem Der <u>Träger</u> einer Abb. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist die abgeschlossene Menge

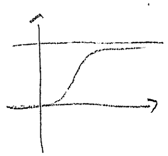
$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$$

Bsp: Funktion $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \leq \chi \leq 1$,
$\chi(x) = 1$ für $x \in (-1, 1)$, $\operatorname{supp} \chi = [-2, 2]$:



1. $\chi(-x) = \chi(x)$
2. Für $x \geq 0$: $\chi(x) = \dfrac{\varphi(2-x)}{\varphi(2-x) + \varphi(x-1)}$

mit $\varphi(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$



(Aus Ana 2: $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$)

Satz. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(U_j)_{j=1,\dots,N}$ eine offene Überdeckung von M. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung der Eins $(\chi_j)_{j=1,\dots,N}$ bzgl. $(U_j)_{j=1,\dots,N}$.

<u>Beweis</u>: <u>1. Schritt</u>: Konstruiere $(\chi_k)_{k=1,\dots,N'} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$
mit 1.' $\chi_k \geq 0$ 2.' $\sum_{k=1}^{N'} \chi_k(x) > 0$ fall $x \in M$

3.' $\forall k \; \exists j$: $\operatorname{supp} \chi_k \subset U_j$

<u>Begründung</u>: Da (U_j) Überdeckung von M, gibt es für alle $x \in M$ ein $j(x)$ mit $x \in U_{j(x)}$.

Da $U_{j(x)}$ offen, gibt es $\varepsilon(x)$: $B_{3\varepsilon(x)}(x) \subset U_{j(x)}$

Aus $M \subset \bigcup_{x \in M} B_{\varepsilon(x)}(x)$ und M kompakt folgt:

$\exists$ endl. Teilüberdeckung $B_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$, $k = 1, \dots, N'$.

Setze $\chi_k(x) := \chi\left(\dfrac{|x - x_k|}{\varepsilon(x_k)}\right)$ mit $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ S. 28.

Dann gilt 1.', 2.' (da $\bigcup_k B_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$ Überdeckung von M)
und 3.' (da $\operatorname{supp} \chi_k \subset \overline{B_{2\varepsilon(x_k)}(x_k)} \subset B_{3\varepsilon(x_k)}(x_k) \subset U_{j(x_k)}$)

2 Schritt: Setze

$$\tilde{\chi}_j := \frac{\sum\limits_{k:\, j(x_k)=j} \chi_k}{\sum\limits_k \chi_k + \prod\limits_k (1-\chi_k)}$$

Wohldefiniert, da aus $\sum_k \chi_k(x) = 0$ folgt $\prod_k (1-\chi_k(x)) = 1$ und somit Nenner $\neq 0$.

Eigenschaften: 1. $0 \leq \tilde{\chi}_j \leq 1$.

2. Da $\prod_k (1-\chi_k(x)) = 0$ für $x \in M \subset \bigcup_k B_{\varepsilon(x_k)}(x_k)$

gilt: $\sum_j \tilde{\chi}_j(x) = 1$ für $x \in M$.

3. $\operatorname{supp} \tilde{\chi}_j = \operatorname{supp} \chi_k$ mit $j(x_k) = j$

$\subset U_j$.

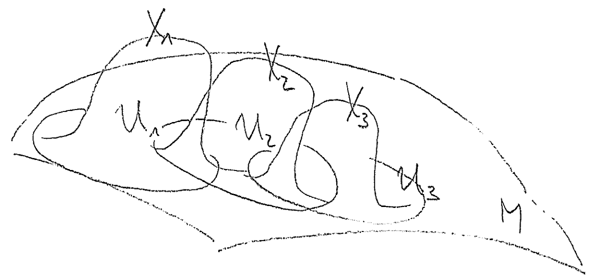
und $\tilde{\chi}_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Def: (Oberflächenintegral - allgemeiner Fall)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, k-dim. C^1-UMF. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt integrierbar, falls es einen endl. Atlas $(\phi_j)_{j=1..N}$ gibt, so daß f integrierbar über M bezüglich aller Karten $\phi_j: V_j \to U_j$ ist. In diesem Fall definiert man:

$$\int_M f(x)\, dS(x) := \sum_{j=1}^{N} \int_{\phi_j(V_j)} \chi_j(x)\, f(x)\, dS(x)$$

wobei $(\chi_j)_{j=1..N}$ eine C^∞-Zerlegung der Eins zu $(U_j)_{j=1,\dots,N}$.



Satz: Der Wert des Integrals in obiger Def. hängt weder von der Wahl des Atlas noch der Zerlegung der Eins ab.

Beweis: Sei $(\tilde{\Phi}_k)_{k=1,\dots,\tilde{N}}$ weiterer Atlas $\tilde{\Phi}_k: \tilde{V}_k \to \tilde{U}_k$ und $(\tilde{\chi}_k)_{k=1,\dots,\tilde{N}}$ $\mathcal{C}^\infty$-Zerlegung d. Eins bzgl. $(\tilde{\Phi}_k)$.

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\Phi_j(V_j)} \chi_j(x)\, f(x)\, dS(x) \underset{\sum_k \tilde{\chi}_k = 1}{=} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\Phi_j(V_j) \cap \tilde{\Phi}_k(\tilde{V}_k)} \chi_j(x) \tilde{\chi}_k(x)\, f(x)\, dS(x)$$

Einfügen von $\tilde{\Phi}_k(\tilde{V}_k)$ da $\tilde{\chi}_k = 0$ außerhalb

$$= \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\tilde{\Phi}_k(\tilde{V}_k)} \tilde{\chi}_k(x)\, f(x)\, dS(x).$$

$\square$

Ausblick: (Hausdorffmaß)

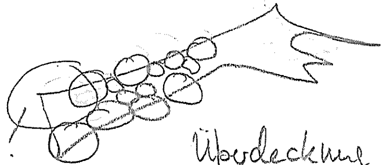
Indikatorfunktion von $A \subset M$: $\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Für $A \subset M$ mit $\mathbb{1}_A$ int.bar über M definiert

$$H^k(A) := \int_M \mathbb{1}_A(x)\, dS(x)$$

ein Maß. Dieses besitzt eine eindeutige Fortsetzung, das sog. k-dim. Hausdorffmaß, auf die Borelmengen des $\mathbb{R}^n$:

$$H^k(A) = \lim_{\delta \to 0} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\operatorname{diam} U_j)^k \;\middle|\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,\ \operatorname{diam} U_j < \delta \right\}$$



U_j Überdeckung durch $(U_j)_{j=1,\dots,\infty}$

Man nennt Mengen $A \subset M$ mit

$$H^k(A) = 0$$

(k-dim.) Nullmengen.

In einer k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF M, sind alle $\mathcal{C}^1$-UMF $A \subset M$ der Dimension $k' < k$ Nullmengen:

$$H^k(A) = 0.$$

Bsp: Oberfläche der S^2 vgl. S. 18

Kugelkoordinaten $\phi : (0,2\pi) \times (0,\pi) \to S^2 \setminus K$

mit $K := \left\{ \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \;\middle|\; \vartheta \in [0,\pi] \right\}$

$$\int_{S^2} 1 \, dS(x) = \int_{S^2 \setminus K} 1 \, dS(x) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{g^{\phi}(\varphi,\vartheta)}\, d\vartheta\, d\varphi$$

K ist 2-dim. Nullmenge

Gramsche Determinante $g^{\Phi}(\varphi,\vartheta) = \det D\phi(\varphi,\vartheta)^T D(\varphi,\vartheta)$

$$\overset{\text{vgl. S. 18}}{=} \det \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sin^2\vartheta .$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\sin\vartheta| \, d\vartheta \, d\varphi = 2\pi \left[-\cos\vartheta \right]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi .$$