(16)

2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ Umgebung von p und $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^{n-k})$ mit $\operatorname{Rang} Df(p) = n-k$ und $M \cap U = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$, dann gilt:

$$T_pM = \operatorname{Kern} Df(p)$$
$$N_pM = \operatorname{span}\{\nabla f_1(p), \dots, \nabla f_{n-k}(p)\}$$

(d.h. die Zeilenvektoren von $Df(p)$ Basis von N_pM)

Beweis: Die Aussagen über T_pM folgen aus

i) $\operatorname{Bild} D\Phi(a) \subset T_pM \subset \operatorname{Kern} Df(p)$

ii) $\dim \operatorname{Bild} D\Phi(a) = \operatorname{Rang} D\Phi(a) = k$
$= n - \operatorname{Rang} Df(p) = \dim \operatorname{Kern} Df(p)$

Zum Beweis von i):

Sei $v \in \operatorname{Bild} D\Phi(a)$, d.h. $v = D\Phi(a)w$, $w \in \mathbb{R}^k$. Für genügend kleines $\varepsilon > 0$ ist

$$\gamma(t) := \Phi(a + tw)$$

eine $\mathcal{C}^1$-Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) \overset{\text{Kettenregel!}}{=} D\Phi(a)w = v$

also $v \in T_pM$.

(17)

Sei $v \in T_pM$. Wähle Kurve $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, $\gamma'(0) = v$.

Dann gilt: $f(\gamma(t)) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} Df(p)\,\gamma'(0) = Df(p)\,v$$

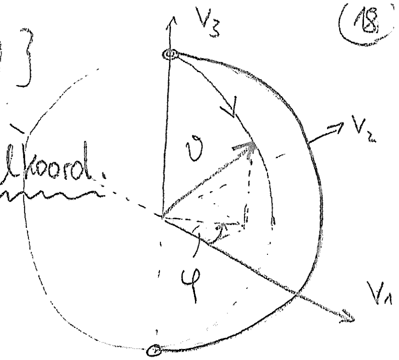
also $v \in \operatorname{Kern} Df(p)$.

Die Beh. $N_pM = \operatorname{span}\{\nabla f_1(p) \dots \nabla f_{n-k}(p)\}$
$= (\operatorname{Kern} Df(p))^\perp$

folgt aus obigem.

Bem: Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ und c regulären Wert, ist Niveaumenge $M = f^{-1}(\{c\})$ eine $(n-1)$-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF. Obiger Satz zeigt, daß $\nabla f(p)$ senkrecht auf T_pM, $p \in M$ steht.

Beispiel: $S^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid |v| = 1\}$



$\phi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \to S^2$ Kugelkoord.

$$\phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Karte für alle $p \in S^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \,\middle|\, \vartheta \in [0, \pi] \right\}$

$$D\phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \sin\vartheta & \cos\varphi \cos\vartheta \\ \cos\varphi \sin\vartheta & \sin\varphi \cos\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Normierte Orthogonalbasis von $T_{\phi(\varphi,\vartheta)} M$:

$$e_\varphi := \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_\vartheta := \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\vartheta \\ \sin\varphi \cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Basis von $T_{\Phi(\varphi,\vartheta)} N$: $e_\varphi \times e_\vartheta$

Def. Für $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist Kreuzprodukt

$$v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

I.3. Ausblick: Allgemeine Mannigfaltigkeiten

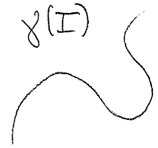
(Später)

II. Integration über Mannigfaltigkeiten

Ziel: • Definition des natürlichen Oberflächenmaßes dS auf einer k-dim C^1-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$

• Definition des Oberflächenintegrals

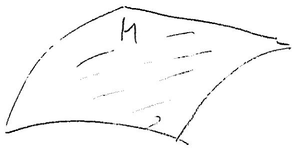
$$\int_M f \, dS$$



Spezialfälle: • $k=1$, $f=1$ $(n=3)$

$$\int_{\gamma(I)} dS = \text{Länge von } \gamma(I)$$

• $k=2$, $f=1$ $(n=3)$



$$\int_M dS = \text{Flächeninhalt von } M.$$

II.1 Heuristische Herleitung: Gramsche Determinante

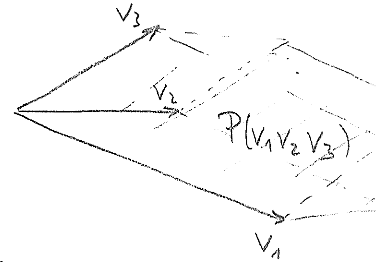
Volumen niederdimensionaler k-Parallelotope

$$\boxed{P(v_1 \dots v_k) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \lambda_1 \dots \lambda_k \in \mathbb{R} : x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \}}$$

wobei $v_1, \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig sind.

Volumen für $k=n$: $A := (v_1 \dots v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n P(v_1, \dots, v_n) &= |\det A| \\ &= \sqrt{\det A^T A} \end{aligned}}$$



Spezialfall $n=3$ $\mathrm{Vol}_3(v_1 v_2 v_3) = |(v_1 \times v_2) \cdot v_3|$ (Spatprodukt)

Volumen für $k<n$:

Spezialfall: $v_j = \begin{pmatrix} w_j \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } B = (w_1 \dots w_k) \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

$$\mathrm{Vol}_k P(v_1 \dots v_k) = \mathrm{Vol}_k P(w_1 \dots w_k) = |\det B|$$

Es gilt: $|\det B| = \sqrt{\det B^T B} = \sqrt{\det A^T A}$

Allgemeiner Fall: $\exists\, O \in O(n)$ mit

$$O\,\mathrm{span}\{v_1, \ldots v_k\} \subset \mathbb{R}^k \times \{0\}$$

d.h. OA ist von Form $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$. Da Volumen unabhängig von orth. Transformationen ist, gilt

$$\mathrm{Vol}_k P(v_1, \ldots v_k) = |\det B| = \sqrt{\det B^T B}$$
$$= \sqrt{\det (OA)^T OA} = \sqrt{\det A^T A}$$

Def: k-dimensionales Volumen des von $v_1, \ldots v_k \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelotops

$$\mathrm{Vol}_k P(v_1 \ldots v_k) := \sqrt{\det A^T A}$$

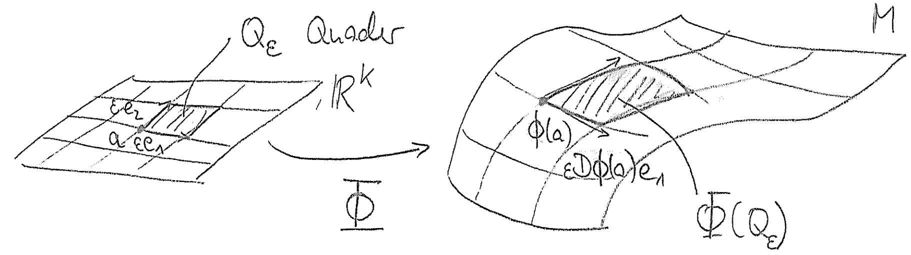
mit $A = (v_1 \ldots v_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$

Bsp: $k = 2 \quad A = (v_1\ v_2)$

$$\det(A^T A) = \det \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 \end{pmatrix} = |v_1|^2 |v_2|^2 - (v_1 \cdot v_2)^2$$
$$= |v_1|^2 |v_2|^2 (1 - \cos^2 \measuredangle(v_1, v_2)) = |v_1|^2 |v_2|^2 \sin^2 \measuredangle(v_1, v_2)$$

Also $\mathrm{Vol}_2 P(v_1, v_2) = |v_1||v_2| |\sin \measuredangle(v_1, v_2)|$.

Volumen des Bildes eines Quaders unter Karte



Für genügend kleine Quader $Q = a + P(\varepsilon e_1, \ldots, \varepsilon e_k)$

$$\Phi(Q_\varepsilon) \approx \phi(a) + P(\varepsilon D\phi(a) e_1, \ldots, \varepsilon D\phi(a) e_k)$$
(ε klein)

$$\mathrm{Vol}_k \Phi(Q_\varepsilon) = \mathrm{Vol}_k P(\varepsilon D\phi(a) e_1, \ldots, \varepsilon D\phi(a) e_k)$$
$$= \underbrace{\varepsilon^k}_{\mathrm{Vol}_k Q_\varepsilon} \cdot \sqrt{\det D\phi(a)^T D\phi(a)}$$

Def: Für eine k-dim C^1-UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ und eine Karte $\Phi: V \to U$ heißt $g^\Phi(x) := \det D\phi(x)^T D\phi(x)$ die Gramsche Determinante bei $x \in V$.

Bem: $g^{\Phi}(x)$ ist die Determinante des metrischen Tensors von M und Φ bei $x \in V$.

II.2. Definition des Oberflächenintegrals

Def: (Integral über Karte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim $\mathcal{C}^1$-UMF und $\Phi: V \to U$ Karte. Eine Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ heißt über M bzgl Φ integrierbar, falls $x \mapsto f(\phi(x))\sqrt{g^{\phi}(x)}$ (Lebesgue) integrierbar über V ist und wir def.

$$\boxed{\int_{\Phi(V)} f(x)\, dS(x) := \int_V f(\phi(x))\sqrt{g^{\Phi}(x)}\, dx}$$

Bem: Oberflächenelement "$dS(x) = \sqrt{g^{\phi}(x)}\, dx$"

Das Integral ist unabhängig von der Wahl der Karte:

Lemma: Seien $\phi_1: V_1 \to U$, $\phi_2: V_2 \to U$ (überlappende) Karten. Dann ist $f: M \to \mathbb{R}$ integrierbar bzgl. ϕ_1 genau dann wenn f integrierbar bzgl. ϕ_2 und

$$\int_{V_1} f(\phi_1(x))\sqrt{g^{\phi_1}(x)}\, dx = \int_{V_2} f(\phi_2(x))\sqrt{g^{\phi_2}(x)}\, dx$$

Beweis: Nach Satz S.12 ist $\varphi := \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1 \to V_2$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Nach Transformationsformel

$$\int_{V_2} g(x)\, dx = \int_{V_1} g(\varphi(x))\, |\det D\varphi(x)|\, dx$$

Anwendung: $g(x) = f(\phi_2(x))\sqrt{g^{\phi_2}(x)}$

- $g(\varphi(x)) = f(\phi_1(x))\sqrt{\det D\phi_2(\varphi(x))^T D\phi_2(\varphi(x))}$
- $D\phi_1(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Kettenregel } \phi_1 = \phi_2 \circ \varphi}}{=} D\phi_2(\varphi(x))\, D\varphi(x) \Rightarrow$

$$g^{\phi_1}(x) = \sqrt{\det\big(\underbrace{D\varphi(x)^T}_{k\times k\text{-Matrix}}\, \underbrace{D\phi_2(\varphi(x))^T D\phi_2(\varphi(x))}_{k\times k\text{-Matrix}}\, \underbrace{D\varphi(x)}_{k\times k\text{-Matrix}}\big)}$$