$$\Rightarrow \quad \text{Rang}\, D\Phi(\zeta) = \text{Rang}\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k \\ 0 \end{pmatrix} = k \, .$$

"$\Leftarrow$": O.B.d.A. (durch Umnummerierung der Koordinaten)

$$\nabla \Phi_1(\Phi^{-1}(p)), \ldots, \nabla \Phi_k(\Phi^{-1}(p)) \quad \text{linear unabhängig}$$

Setze $\Phi' := (\Phi_1, \ldots, \Phi_k) : V \to \mathbb{R}^k$. Dann $\text{Rang}\, \Phi'(\Phi^{-1}(p)) = k$ und Φ' ist $\mathcal{C}^\alpha$-glatt. Nach Satz über Umkehrfunktion gibt es eine offene Umgebung V' von $\Phi^{-1}(p)$ und eine offene Menge $U' \subset \mathbb{R}^k$, so dass $\Phi' : V' \to U'$ ein $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus ist.

Setze $\psi : V' \times \mathbb{R}^{n-k} \to U' \times \mathbb{R}^{n-k}$, $\psi(\zeta, \eta) := \Phi(\zeta) + (0, \eta)$

Dann gilt: i) ψ ist bijektiv, denn $\forall\, \zeta, \zeta' \in V'$, $\eta, \eta' \in \mathbb{R}^{n-k}$

$$\psi(\zeta, \eta) = \psi(\zeta', \eta') \Rightarrow \Phi'(\zeta) = \Phi'(\zeta') \Rightarrow \eta = \eta' \, .$$

und für $(\hat{\zeta}, \hat{\eta}) \in U' \times \mathbb{R}^{n-k}$ ist $\zeta := (\Phi')^{-1}(\hat{\zeta}) \in V'$

und $\psi(\zeta, \eta) = \Phi(\zeta) + (0, \eta) = (\hat{\zeta}, \hat{\eta})$ für geeignetes $\eta \in \mathbb{R}^{n-k}$.

ii) $$D\psi(\zeta, \eta) = \begin{pmatrix} D\Phi'(\zeta) & 0 \\ * & \mathrm{Id}_{n-k} \end{pmatrix}$$ ist invertierbar.

iii) ψ ist $\mathcal{C}^\alpha$-glatt und nach Satz über Umkehrfkt ein $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus.

Da Φ Homöomorphismus ist $\Phi(V')$ offen in M. Wähle $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $\Phi(V') = \tilde{U} \cap M$ und setze $\hat{U} := (U' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap \tilde{U}$ und $\hat{V} := \psi^{-1}(\hat{U})$.

Dann ist $\psi : \hat{V} \to \hat{U}$ ein $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus mit

$$\begin{aligned} \psi(\hat{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) &= \psi(\hat{V} \cap (V' \times \mathbb{R}^{n-k}) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})) \\ &= \psi(\hat{V} \cap (V' \times \{0\})) = \psi(\hat{V}) \cap \psi(V' \times \{0\}) \\ &= \hat{U} \cap \Phi(V') = \hat{U} \cap \tilde{U} \cap M = \hat{U} \cap M \end{aligned}$$

$\square$

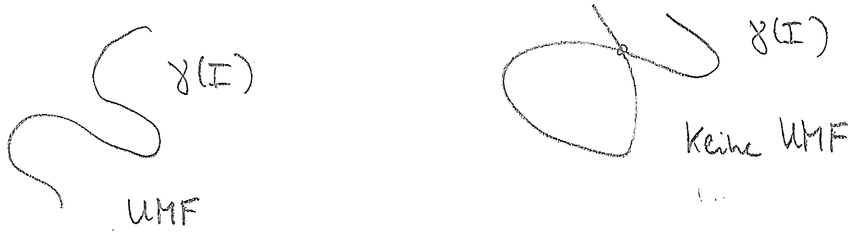
Def: Eine Abbildung $\Phi : V \to U$ wie in obigem Satz heißt *Karte von M* bei p.

Eine Familie (Φ_j) von Karten heißt *Atlas* von M, falls $M \subset \bigcup_j U_j$

Bem: I.A. ist mehr als eine Karte zur Beschreibung von M nötig.

Beispiele: 1. Die Spur $\gamma(I)$ einer C^α-Kurve $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, ist eine 1-dim. C^α-UMF, wenn $\gamma'(t) \neq 0$ und γ Homöomorphismus.

Begründung. Dann ist $\gamma = \phi : I \to \gamma(I)$ eine Karte von $\gamma(I)$.



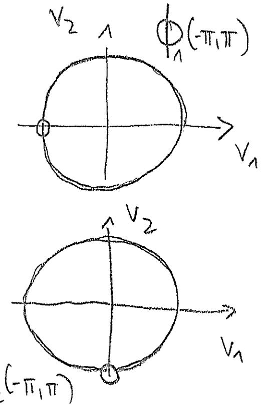
Hier: Atlas besteht aus einer Karte ϕ.

2. Einheitssphäre $S^1 := \{ v \in \mathbb{R}^2 \mid |v| = 1 \} \subset \mathbb{R}^2$

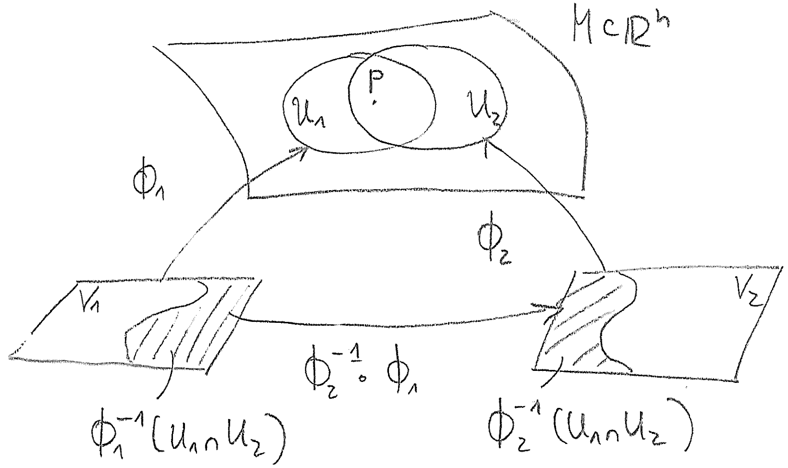
Möglicher Atlas $\{\phi_j\}_{j=1,2}$:

$\phi_1 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

$\phi_2 : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$, $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$



Unabhängigkeit der Eigenschaften der UMF von Kartenwahl:



Verhalten unter Kartenwechsel:

$$(*) \quad \phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1' := \phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to V_2' := \phi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$$

für überlappende Karten: $\phi_j : V_j \to U_j$, $j = 1,2$, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

> **Satz:** Sind ϕ_1, ϕ_2 zwei überlappende Karten einer C^α-UMF wie oben, dann sind V_1' und V_2' offen im $\mathbb{R}^k$ und der Kartenwechsel $\phi_2^{-1} \circ \phi_1 : V_1' \to V_2'$ ist C^α-Diffeomorphismus.

13

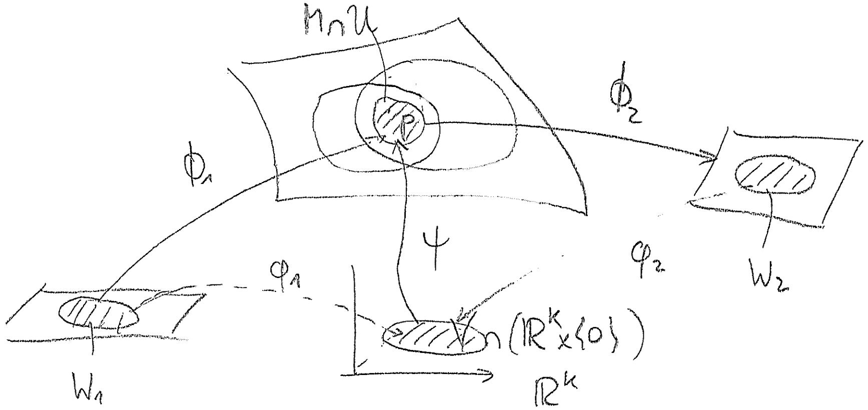
Beweis: Da Φ_1, Φ_2 Homöomorphismen und U_1, U_2 offen und somit $U_1 \cap U_2$ offen in M, sind V_1', V_2' offen.

Offensichtlich: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1' \to V_2'$ ist bijektiv.

Bleibt z.z.: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 \in \mathcal{C}^\alpha(V_1', V_2')$, $(\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)^{-1} = \Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 \in \mathcal{C}^\alpha(V_2', V_1')$

Sei $p \in U_1 \cap U_2$. Nach Def. der UMF ex. $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen mit $M \cap U \subset U_1 \cap U_2$ und $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus $\psi : V \to U$:

$$M \cap U = \psi(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$$



- $W_j := \Phi_j^{-1}(M \cap U)$, $j = 1,2$ ist offen in $\mathbb{R}^k$ (Begr. wie oben!)
- $\psi^{-1} \circ \Phi_j : W_j \to V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})$ bijektiv, $\mathcal{C}^\alpha$-glatt und hat Form: $\psi^{-1} \circ \Phi_j = (\varphi_j, 0)$ mit $\varphi_j : W_j \to \mathbb{R}^k$.

14

Da $\operatorname{Rang} D\psi^{-1} = n$ und $\operatorname{Rang} \Phi_j = k$ gilt

$\operatorname{Rang} \varphi_j = k$.

Mit Satz zur Umkehrfunktion folgt daraus:

$$\varphi_j : W_j \to \varphi_j(W_j) := \{\xi \in \mathbb{R}^k \mid (\xi, 0) \in \psi^{-1}(M \cap U)\}$$

ist $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus.

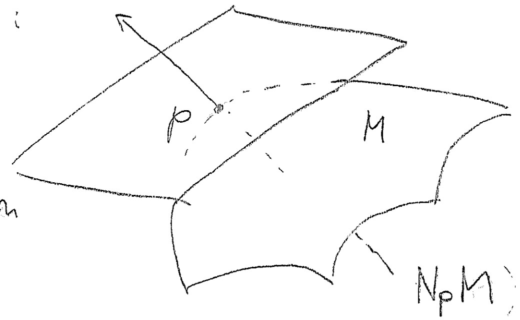
Es gilt aber: $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ und

$$\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2 = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$$

Also ist auch $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$, $\Phi_1^{-1} \circ \Phi_2$ $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeomorphismus $\square$

I.2. Tangential- und Normalraum

k-dim. UMF $M \subset \mathbb{R}^n$ werden lokal, d.h. für jeden $p \in M$ durch k-dim. affine Räume $p + T_pM$ approximiert:



Tangentialraum T_pM

N_pM; Normalenraum

Def: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF und $p \in M$.

1. $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M bei p, wenn es eine $\mathcal{C}^1$-Kurve $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit geeignetem $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$.
   Die Menge aller Tangentialvektoren heißt der Tangentialraum an M bei p und wird mit T_pM bezeichnet.

2. $N_pM := (T_pM)^\perp$ heißt Normalenraum an M bei p. Seine Elemente heißen Normalenvektoren an M bei p.

Bem: T_pM ist k-dim Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$
N_pM — n-k —

Bsp: Spur $\gamma(I)$ von S. 11. $T_p\gamma(I) = \mathbb{R}\gamma'(a)$ mit $a = \gamma(p)$.

Ziel: Charakterisierung von T_pM und N_pM.

Satz: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim. $\mathcal{C}^1$-UMF und $p \in M$.

1. Ist $\phi : V \to \mathcal{U}$ Karte von M bei $p \in \mathcal{U}$, dann
   $$T_pM = \text{Bild}\, D\Phi(a), \quad p := \phi(a)$$
   (d.h. Spaltenvektoren von $D\Phi(a)$ bilden Basis von T_pM.