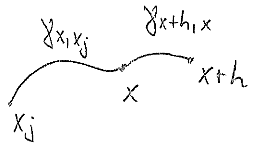
Jede offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ zerfällt in wegzusammenhängende offene $U_j \subset \mathbb{R}^n$, $j \in J$, d.h. $U = \bigcup_{j \in J} U_j$.

3. $\Rightarrow$ 2. Sei $x_j \in U$ und $U_j \ni x_j$ Zusammenhangskomponente. Für $x \in U_j$ gibt es stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma_{x,x_j} : [0,1] \to U_j$ mit $\gamma(0) = x_j$, $\gamma(1) = x$. Setze

$$f_j(x) := \int_{\gamma_{x,x_j}} \langle v(y), dy \rangle$$



(hängt für festes x_j nur von x ab!) Für hinreichend kleine $|h|$ ist $x+h \in U_j$ und es gilt

$$\frac{f(x+h) - f(x) - \langle v(x), h \rangle}{|h|} = \frac{1}{|h|} \left(\int_{\gamma_{x+h,x}} \langle v(y), dy \rangle - \langle v(x), h \rangle \right)$$

$$= \frac{1}{|h|} \left(\int_0^1 \langle v(\gamma_{x+h,x}(s)) - v(x), \gamma'_{x+h,x}(s) \rangle \, ds \right)$$

$$\xrightarrow{h \to 0} 0 \text{, da } v \text{ stetig!}$$

Somit $\nabla f_j(x) = v(x)$ auf allen Zusammenhangskomp.

□

V.3. Lemma von Poincaré

Ist die Integrabilitätsbedingung (*) auf S. 81 hinreichend für Konservativität von v? Nein!

Beispiel: Magnetfeld eines Linienstroms entlang x_3-Achse

$$v(x) = \begin{pmatrix} -x_2 / (x_1^2 + x_2^2) \\ x_1 / (x_1^2 + x_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0 \}$$

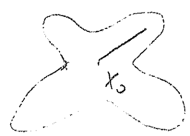
$$\operatorname{rot} v(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{pmatrix} = 0$$

Aber: v ist nicht konservativ, z.B. $\gamma : [0, 2\pi] \to \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = 2\pi$$

Def: $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, falls es ein $x_0 \in U$ gibt so daß für alle $x \in U$ und alle $t \in [0,1]$:

$$x_0 + t(x - x_0) \in U$$



Satz $v \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig

Dann sind äquivalent: 1. $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ für alle $j,k \in \{1..n\}$

2. $\exists f \in \mathcal{C}^2(U)$: $v = \nabla f$

Bem: Dieses Lemma von Poincaré bleibt gültig für einfach zusammenhängende offene $U \subset \mathbb{R}^n$.

Beweis: $2. \Rightarrow 1.$ Lemma S.

$1. \Rightarrow 2.$ Sei $x_0 \in U$ der ausgezeichnete Pkt und setze $f(x) := \int_0^1 \langle v(x_0 + t(x-x_0)), x - x_0 \rangle \, dt$, $x \in U$.

Dann gilt $f \in \mathcal{C}^1(U)$ mit:

$$\partial_j f(x) = \int_0^1 \partial_j \sum_{k=1}^n v_k(x_0 + t(x-x_0))(x_k - x_{0k}) \, dt$$

$$\overset{\text{Prod. regel}}{=} \int_0^1 \sum_k \Big[(\partial_j v_k)(x_0 + t(x-x_0)) \, t (x_k - x_{0,k}) + v_k(x_0 + t(x-x_0)) \underbrace{\partial_j (x_k - x_{0,k})}_{= \delta_{jk}} \Big] dt$$

$$\overset{\partial_j v_k = \partial_k v_j}{=} \int_0^1 \Big[t \underbrace{\langle x - x_0, \nabla v_j (x_0 + t(x-x_0)) \rangle}_{= \frac{d}{dt} v_j(x_0 + t(x-x_0))} + v_j(x_0 + t(x-x_0)) \Big] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \big[t \, v_j(x_0 + t(x-x_0)) \big] dt = v_j(x) \qquad \square$$

Ausblick:

Die Existenz von rotationsfreien VF, die keine Gradientenfelder sind, hängt mit den topologischen Eigenschaften des Gebiets U zusammen. Der Quotientenraum

$$H^1(U) := \{v : U \to \mathbb{R}^n \mid \operatorname{rot} v = 0\} \Big/ \{v : U \to \mathbb{R}^n \mid \exists f : v = \nabla f\}$$

heißt erste de Rhamsche Kohomologiegruppe.

Bsp (vgl. S. 87) $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$

$$H^1(U) \cong \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} -(x-a_j)_2 / |x-a_j|^2 \\ (x-a_j)_1 / |x-a_j|^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; j = 1..k \right\}$$

$\dim H^1(U) = k$