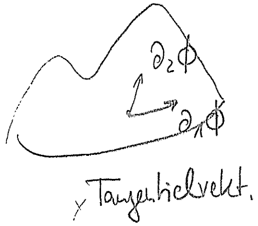
Beweis des Satzes von Stokes im $\mathbb{R}^3$:



Orientierung n auf A:

$$n(\phi(x)) = \pm \frac{\partial_1\phi(x) \times \partial_2\phi(x)}{|\partial_1\phi(x) \times \partial_2\phi(x)|}$$

O.B.d.A. positives Vorzeichen!

$$\Rightarrow \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), n(\phi(x))\rangle \, |\partial_1\phi(x) \times \partial_2\phi(x)|$$

$$= \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), \partial_1\phi(x) \times \partial_2\phi(x)\rangle$$

Lemma S.73

$$= \langle [Dv(\phi(x)) - Dv(\phi(x))^T]\underbrace{\partial_1\phi(x)}_{=D\phi(x)e_1}, \underbrace{\partial_2\phi(x)}_{=D\phi(x)e_2}\rangle$$

Def d. Pullback

$$= \langle \phi^*[Dv - (Dv)^T]e_1, e_2\rangle$$

$$= \langle [D\phi^*v - (D\phi^*v)^T]e_1, e_2\rangle$$

Rotation im $\mathbb{R}^2$

$$= \partial_1(\phi^*v)_2(x) - \partial_2(\phi^*v)_1(x).$$

Einsetzen in l.S.:

Gramsche Det.:

$$= \sqrt{\det D\phi(x)^T D\phi(x)}$$

$$= \sqrt{|\partial_1\phi|^2|\partial_2\phi|^2 - \langle\partial_1\phi, \partial_2\phi\rangle^2}$$

$$\int_A \langle \operatorname{rot} v(y), n(y)\rangle \, dS(y)$$

$$= \int_\Omega \langle \operatorname{rot} v(\phi(x)), n(\phi(x))\rangle \, |\partial_1\phi(x) \times \partial_2\phi(x)| \, dx$$

$$= \int_\Omega \left(\partial_1(\phi^*v)_2(x) - \partial_2(\phi^*v)_1(x)\right) dx$$

Stokes im $\mathbb{R}^2$

$$= \int_{\partial\Omega} \langle \phi^*v, t\rangle \, dS$$

Tangentialvektor $\tau(\phi(x)) = \dfrac{D\phi(x)t(x)}{|D\phi(x)t(x)|}$ (vgl. S.76!)

$$\int_{\partial A} \langle v, d\tau\rangle = \int_{\phi(\partial\Omega)} \langle v, \tau\rangle \, d\tilde{S}$$

← Oberflächenmaß auf ∂A

$d\tilde{S} = |D\phi(x)t(x)| \, dS$

Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$

$$= \int_{\partial\Omega} \left\langle v(\phi(x)), \frac{D\phi(x)t(x)}{|D\phi(x)t(x)|}\right\rangle |D\phi(x)t(x)| \, dS$$

Def. Pullback

$$= \int_{\partial\Omega} \langle \phi^*v, t\rangle \, dS \qquad \square$$

V. Integrabilität von Vektorfeldern

Ziel: · Erläuterung und Äquivalenz der folgenden Begriffe

a) Existenz eines Potentials $v = \nabla f$

b) Konservatives Vektorfeld

c) Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals $\int_{\mathcal{C}} \langle v, dx \rangle$

· Integrabilität und Lemma von Poincaré

V.1. Gradientenfelder

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen, von der Form

$$v = \nabla f \qquad \text{mit } f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$$

heißen Gradientenfelder mit Potential f.

Sprechweise aus der Physik - wichtige Bspe:

v Kraftfeld z.B. elektrische Feld

f Potential —"— Pot.

Frage: Ist jedes Vektorfeld ein Gradientenfeld?

Fall $n=1$: Ja, denn Stammfkt f von v erfüllt $v = f'$

Fall $n \geq 2$: Nein! Gegenspiel unten

Lemma: Für $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ offen und $v = \nabla f$ gilt für alle $j,k \in \{1..,n\}$: $\boxed{\partial_j v_k = \partial_k v_j}$ (*)

Beweis: Lemma von Schwarz □

Bem: Integrabilitätsbedingung (*) für

$n=2$: $\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \operatorname{rot} v = 0$

$n=3$: $\operatorname{rot} v = 0$

Bsp: $v(x) = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\quad x \in \mathbb{R}^2$

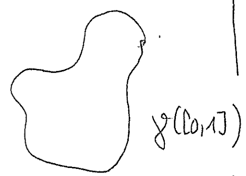
$\operatorname{rot} v = a_{21} - a_{12} \neq 0$ für $A^T \neq A$.

$\Rightarrow$ Kein Gradientenfeld!

2. Konservative Vektorfelder und Wegunabhängigkeit

Def: Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U,\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißen *konservativ*, falls für alle stückweise stetig diff.baren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ gilt:

$$\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle = 0$$



Gradientenfelder sind konservativ. Dies folgt aus der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals:

Lemma: $f \in \mathcal{C}^1(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma : [0,1] \to U$ stückweise stetig diff.bar. Dann:

$$\int_\gamma \langle \nabla f(x), dx \rangle = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

Beweis: o.B.d.A nur für $\gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], U)$

$$\text{l.S.} = \int_0^1 \langle \nabla f(\gamma(s)), \gamma'(s) \rangle \, ds = \int_0^1 \frac{d}{ds} f(\gamma(s)) \, ds$$

$= \text{r.S.}$ $\square$

Der folgende Satz zeigt die Äquivalenz der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals und der Existenz eines Potentials.

Satz Für Vektorfelder $v \in \mathcal{C}(U,\mathbb{R}^n)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen sind äquivalent:

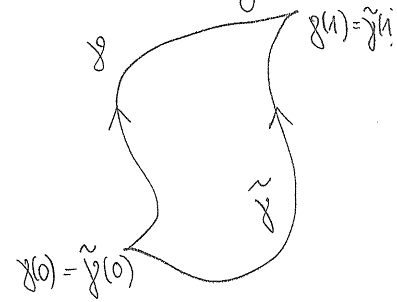
1. v ist konservativ
2. v ist Gradientenfeld
3. Für alle stückweise stetig diffbaren Kurven $\gamma : [0,1] \to U$ hängt $\int_\gamma \langle v(x), dx \rangle$ nur von den Endpunkten ab.

Beweis: 2. ⇒ 1. Lemma S. 82

1. ⇒ 3. Seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ stückweise stetig diffbar mit $\gamma(0) = \tilde{\gamma}(0)$, $\gamma(1) = \tilde{\gamma}(1)$

Betrachte $\hat{\gamma} : [0,1] \to U$

$$\hat{\gamma}(s) := \begin{cases} \gamma(2s), & s \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \tilde{\gamma}(2(1-s)), & s \in (\tfrac{1}{2}, 1] \end{cases}$$



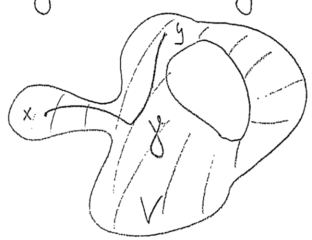
Dann ist $\hat{\gamma}$ stückweise stetig diffbar mit $\hat{\gamma}(0)=\hat{\gamma}(1)$.

Somit: $0 = \int_{\hat{\gamma}} \langle v(x), dx \rangle = \int_{\gamma} \langle v(x), dx \rangle - \int_{\tilde{\gamma}} \langle v(x), dx \rangle$.

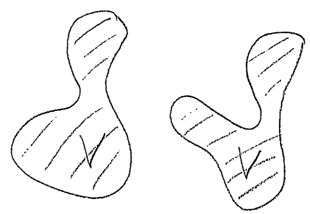
Zum Beweis von 3. $\Rightarrow$ 2. benötigen wir:

Def. $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt wegzusammenhängend, falls es für alle $x, y \in V$ eine stetige Kurve $\gamma : [0,1] \to V$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ gibt.

Wegzusammenhängend



Nicht wegzusammenhängend



Bem: $V \subset \mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, falls es wegzusammenhängend ist und jede stetige Kurve $\gamma : [0,1] \to V$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$ stetig in die konst. Kurve $\gamma(0)$ deformiert werden kann; d.h. $\exists\, H : [0,1]^2 \to V$ stetig mit $H(s,0) = \gamma(s)$, $H(s,1) = H(0,t) = H(1,t) = \gamma(0)$.

Wir benötigen:

Lemma: $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, wegzusammenhängend $\Rightarrow$ $\forall x, y \in V$ $\exists$ stückweise stetig diffbare Kurve $\gamma : [0,1] \to V$

$\gamma(0) = x \quad \gamma(1) = y$

Beweis: Sei $\tilde{\gamma} : [0,1] \to V$ stetige Kurve mit $\tilde{\gamma}(0) = x$, $\tilde{\gamma}(1) = y$.

- Für $n \in \mathbb{N}$ definiere lineare Interpolation der Punkte $\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(\frac{1}{n}), \tilde{\gamma}(\frac{2}{n}) \dots \tilde{\gamma}(1)$ den Polygonzug

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k)\left(\tilde{\gamma}\left(\frac{k+1}{n}\right) - \tilde{\gamma}\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$$\text{für } \frac{k}{n} \le t < \frac{k+1}{n}.$$

Da $\tilde{\gamma}$ gleichmäßig stetig, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n = n(\varepsilon)$ so daß für alle $t \in [0,1]$: $|\gamma(t) - \tilde{\gamma}(t)| < \varepsilon$.

- Da $\tilde{\gamma}([0,1]) \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und V offen gibt es $\varepsilon > 0$ so daß $D_\varepsilon(\tilde{\gamma}) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \mathrm{dist}(\tilde{\gamma}[0,1], x) < \varepsilon \}$

- Für dieses ε ist die stückweise stetig diffbare Kurve γ ganz in V. $\square$