I. Mannigfaltigkeiten

Hier: k-dim. Untermannigfaltigkeiten (UMF) des $\mathbb{R}^n$

I.1. Definition und Charakterisierungen

Ziel: Äquivalente Charakterisierungen von k-dim. C^α-UMF des $\mathbb{R}^n$

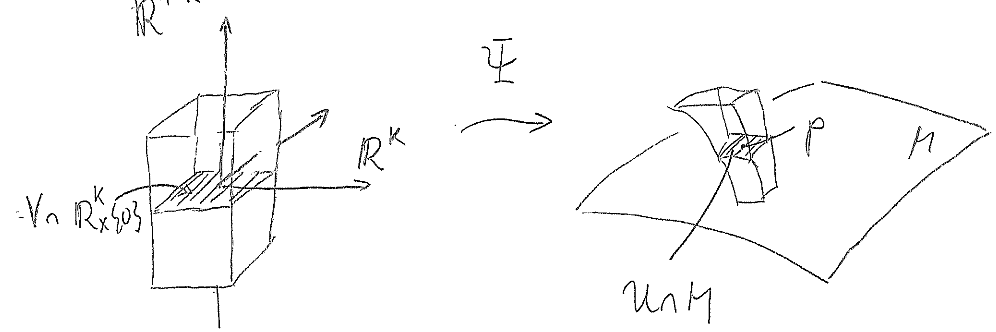
1. durch Parametrisierungen
2. als Lösungsmenge von Gleichungen
3. durch Karten.

Im Folgenden: $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$.

Erinnerung an Analysis II:

Def: $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt k-dim. C^α-UMF, wenn für alle $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^α-Diffeomorphismus $\psi: V \to U$ existiert mit

$$M \cap U = \psi(V \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$$



Bemerkungen & Ergänzungen:

1. Eine bijektive Abb. $f: U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^n$ heißt
   - Homöomorphismus, falls f, f^{-1} stetig
   - C^α-Diffeomorphismus, — C^α-glatt.

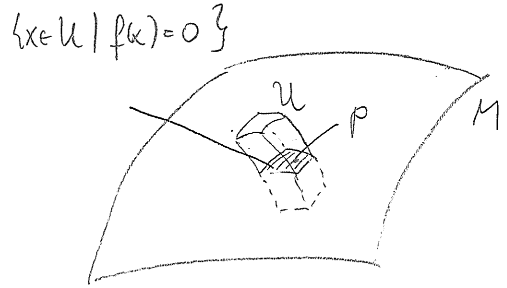
2. In Ana 2 wurde in der Definition zusätzlich $\psi(0) = p$ verlangt. Dies kann o.B.d.A. hinzugefügt bzw. weggelassen werden.

3. Die Abbildung ψ^{-1} ist ein lokaler "Flachmacher" oder "äußere Karte". ψ nennt man Parametrisierung.

Aus Analysis 2 ist alternative Char. bekannt:

Satz: $M\subset\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dim. $\mathcal{C}^\alpha$-UMF, wenn es zu jedem $p\in M$ eine offene Umgebung $U\subset\mathbb{R}^n$ und $f\in\mathcal{C}^\alpha(U,\mathbb{R}^{n-k})$ mit Rang $Df(p)=n-k$ gibt, so dass

$$M\cap U=\{x\in U\mid f(x)=0\}$$



M ist lok. Lösungsmenge einer (nichtlinearen) Gleichung!

Bem: Totale Ableitung

$$Df(x):=f'(x)=J_f(x)=\begin{pmatrix}\partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x)\\ \vdots & & \\ \partial_1 f_{n-k}(x) & \cdots & \partial_n f_{n-k}(x)\end{pmatrix}$$

hat vollen Rang für $x=p$. Äquivalent dazu:

$\nabla f_1(p),\dots,\nabla f_{n-k}(p)$ lin. unabhängig

Beweis des Satzes: Sei $p\in M$.

"⇒": Es gibt off. Umg. $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^n$ offen & $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeo ψ

$$M\cap U=\psi(V\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\}))$$
$$=\{x\in U\mid (\psi^{-1})_{k+1}(x)=\dots=(\psi^{-1})_n$$

Setze $f:=((\psi^{-1})_{k+1},\dots,(\psi^{-1})_n):U\to\mathbb{R}^{n-k}$. Dann ist $f\in\mathcal{C}^\alpha(U,\mathbb{R}^{n-k})$ mit

$$\nabla f_1(p)=\nabla(\psi^{-1})_{k+1},\dots,\nabla f_{n-k}(p)=\nabla(\psi^{-1})_n(p)$$

linear unabhängig, da Rang $\psi^{-1}(p)=n$. Also Rang $f(p)=n-k$

"⇐": vgl. Cor. 4.31 aus Analysis 2. (Übung!)

Beispiele: 1. Jeder k-dim. Unterraum des $\mathbb{R}^n$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-UMF M, denn:

a) $\exists$ lin. Abb. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-k}$ mit Rang $f=n-k$ und

$$\text{Kern } f = M = \{x\in\mathbb{R}^n\mid f(x)=0\}$$

oder:

b) $\exists$ Isomorphismus $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\psi^{-1}(M) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

Affine Unterräume sind ebenfalls $\mathcal{C}^\infty$-UMF.

2. Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist n-dim. $\mathcal{C}^\infty$-UMF, denn $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ mit $f(x) = |x|^2 - 1$ und $\nabla f(x) = 2x \neq 0$ auf S^n.

3. Hyperboloid $H_c := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + c\}$, $c \neq 0$ ist eine 2-dim. $\mathcal{C}^\infty$-UMF im $\mathbb{R}^3$. (Übung!)

4. Sei $\mathbb{R}^{n\times n}$ Vektorraum der reellen $n\times n$-Matrizen und

$$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^T A = Id\}$$

Menge der orth. Matrizen. $O(n)$ ist eine $\frac{n(n-1)}{2}$-dim. $\mathcal{C}^\infty$-UMF des $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Bew.: $f: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$, $f(A) := A^T A - Id$

mit $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ $\frac{n(n+1)}{2}$-dim. Unterraum des $\mathbb{R}^{n\times n}$

Evident: $f \in \mathcal{C}^\infty$ da

$$Df(A)H = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+tH) - f(A)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(A+tH)^T(A+tH) - A^T A}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} (H^T A + A^T A + t H^T H) = H^T A + A^T H$$

$Df(A): \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ ist für $A \in O(n)$ surjektiv, da für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ und $H = \frac{1}{2}AB$ gilt: $Df(A)H = B$.

Also ist $\mathrm{Rang}\, Df(A) = \frac{n(n+1)}{2} = n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$ $\square$

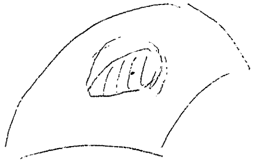
Zur Topologie auf UMF $M \subset \mathbb{R}^n$:

Def. Eine Teilmenge $U \subset M$ heißt offen/abgeschlossen in M, wenn es eine offene/abgeschlossene Menge $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ gibt mit $U = \tilde{U} \cap M$.

Man kann sich leicht überlegen:

1. M wird so zu einem topologischen Raum (M, T)
   d.h. System T von Teilmengen von M mit:
   i) bel. Vereinigungen von Mengen aus T sind in T
   ii) endl. Durchschnitte — " —
   iii) $\emptyset, M \subset T$

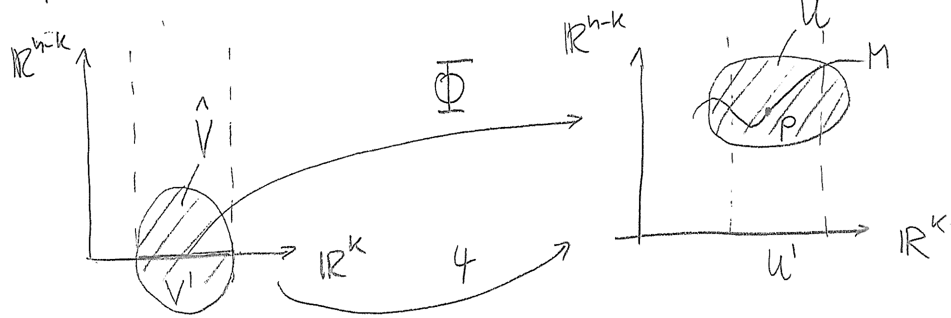
2. Die oben Def. Topologie stimmt mit der von der verebten Metrik induzierten Topologie überein.



Satz: M ist genau dann k-dim. $\mathcal{C}^\alpha$-UMF des $\mathbb{R}^n$, wenn es für alle $p \in M$ eine in M offene Umgebung $U \subset M$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^k$ und ein Homöomorphismus $\Phi: V \to U$ gibt, so dass $\Phi \in \mathcal{C}^\alpha(V, \mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{Rang} D\Phi(x) = k \ \forall x \in V$.

Beweis: Sei $p \in M$.

"$\Rightarrow$": Es gibt offene Mengen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{C}^\alpha$-Diffeo. $\psi: \tilde{V} \to \tilde{U}$ mit $p \in \tilde{U}$ und $M \cap \tilde{U} = \psi(\tilde{V} \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\}))$.



Setze $V := \{\xi \in \mathbb{R}^k \mid (\xi, 0) \in \tilde{V}\}$ und

$$\Phi: V \to U := \psi(V), \quad \Phi(\xi) := \psi((\xi, 0))$$

Dann: V offen in $\mathbb{R}^k$, U offen in M mit $p \in U$

Φ ist Homöomorphismus und $\mathcal{C}^\alpha$-glatt

$$D\Phi(\xi) = D\psi(\xi, 0) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(Kettenregel!)}$$