PROF. DR. BERND SCHMIDT
DR. JOHANNES GIANNOULIS

15. DEZEMBER 2009
BLATT 9

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 29: Die Leibniz-Regel, zweite Formulierung

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $p, q \in [1, \infty]$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Beweisen Sie: Sind $f \in W^{k,p}(U)$, $g \in W^{k,q}(U)$ für ein $k \geq 1$, so ist $f \cdot g \in W^{k,1}(U)$ und

$$D^\alpha(f \cdot g) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f \cdot D^{\alpha-\beta} g, \quad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

Aufgabe 30: Die Spur eines Produktes

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, $p, q \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in W^{1,p}(U)$, $g \in W^{1,q}(U)$. Weiter seien

$$T_s : W^{1,s}(U) \to L^s(\partial U),\ 1 < s < \infty,$$

die zugehörigen Spurabbildungen. Beweisen Sie:

$$T_1(f \cdot g) = T_p(f) \cdot T_q(g).$$

Aufgabe 31: Nichtexistenz der Spurabbildung für L^p-Funktionen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand ∂U. Zeigen Sie, dass auf $L^p(U)$ mit $1 \leq p < \infty$ *keine* sinnvolle Spurabbildung definiert werden kann, das heißt, dass *kein* beschränkter linearer Operator

$$T : L^p(U) \to L^p(\partial U)$$

mit $Tu = u|_{\partial U}$ für $u \in C(\overline{U}) \cap L^p(U)$ existiert.

Aufgabe 32: Partielle Integration für Sobolev-Funktionen

a) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p, q \in [1, \infty]$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in W^{1,p}(U)$, $g \in W_0^{1,q}(U)$. Beweisen Sie, dass für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\int_U f g_{x_i}\, dx = -\int_U f_{x_i} g\, dx.$$

b) Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, $p, q \in (1, \infty)$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in W^{1,p}(U)$, $g \in W^{1,q}(U)$. Weiter seien

$$T_s : W^{1,s}(U) \to L^s(\partial U),\ 1 < s < \infty,$$

die zugehörigen Spurabbildungen und ν die äußere Normale an ∂U.
Beweisen Sie, dass für beliebiges $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_U f g_{x_i}\, dx &= \int_{\partial U} T_p(f) T_q(g) \cdot \nu^i\, dS - \int_U f_{x_i} g\, dx \\ &= \int_{\partial U} T_1(f \cdot g) \cdot \nu^i\, dS - \int_U f_{x_i} g\, dx.\end{aligned}$$