Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

8. Dezember 2009
Blatt 8

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 25: Injektivität der Einbettung $L^1_{\text{loc}} \to (C_c^\infty)'$

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{\text{loc}}(U)$ und es gelte

$$\int_U u \cdot \phi \, dx = 0, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(U).$$

Begründen Sie, dass $u = 0$ fast überall.

Aufgabe 26: Eine nicht differenzierbare Funktion mit zweiter Ableitung

Zeigen Sie, dass die durch

$$u(x) := \operatorname{sgn} x_1 + \operatorname{sgn} x_2, \quad x \in B_1(0),$$

definierte Funktion $u : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ keine schwachen Ableitungen $\partial_1 u$, $\partial_2 u$ erster Ordnung hat, obwohl die gemischte schwache Ableitung $\partial_1\partial_2 u$ zweiter Ordnung existiert.

Aufgabe 27: Die Leibnizregel der schwachen Differentiation

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Beweisen Sie:
Für $u \in W^{k,p}(U)$ und $\zeta \in C_c^\infty(U)$ ist $\zeta \cdot u \in W^{k,p}(U)$ und

$$D^\alpha(\zeta \cdot u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \zeta \cdot D^{\alpha-\beta} u, \quad \forall\, |\alpha| \leq k,$$

wobei $\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n}$.

Aufgabe 28: Funktionen mit verschwindender schwacher Ableitung

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Zeigen Sie, dass eine Funktion $u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(U)$ mit verschwindenden schwachen Ableitungen* erster Ordnung konstant* ist.
**Bemerkung:* Hier meint man natürlich, dass eine entsprechende Funktion in der jeweiligen L^1_{loc}-Äquivalenzklasse liegt (also die Aussagen für deren Repräsentanten fast überall gelten).