Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 22: Eine nichtlineare PDE erster Ordnung

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung

$$u_{x_2} = u_{x_1}^3, \quad u(x_1, 0) = 2x_1^{3/2} \text{ auf } S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0, \ x_1 > 0\}.$$

Aufgabe 23: Die Eikonalgleichung

Betrachten Sie die *Eikonalgleichung*

$$u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 = 1 \tag{1}$$

auf dem $\mathbb{R}^2$.

a) Welche Form haben die Charakteristiken der Gleichung? Wie sehen deren Bilder unter der Projektion $(x, y, z) \mapsto x$ aus?

b) Gegeben sei nun eine konvexe, beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Bestimmen Sie alle auf einer Umgebung U von Γ definierten Lösungen der Eikonalgleichung (1) zu den Cauchy-Daten

$$u|_\Gamma = 0.$$

c) Lassen sich diese Lösungen auf $(\mathbb{R}^2 \backslash \Omega) \cup U$ fortsetzen? Existieren sogar Fortsetzungen auf ganz $\mathbb{R}^2$? Bestimmen Sie insbesondere die maximalen Definitionsbereiche der Lösungen in den Fällen $\Omega = B_1(0)$ und $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} < 1\right\}$.

d) Zeigen Sie, dass jede auf einer beliebigen offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ definierte Lösung von (1) lokal die Summe einer Konstante und des Abstandes zu einer Kurve ist.

Aufgabe 24: Verhalten in der Nähe eines charakteristischen Punktes

Betrachten Sie das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} x_2 u_{x_1} - \sin(x_1) u_{x_2} + au = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^2, \\ u(x_1, 0) = x_1^2 & \text{für } x_1 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

für feste $a \in \mathbb{R}$. Wann hat dieses Problem eine in einer Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ des Ursprungs $(x_1, x_2) = (0, 0)$ definierte Lösung? Beweisen Sie ihre Behauptung!