PROF. DR. BERND SCHMIDT
DR. JOHANNES GIANNOULIS

2. FEBRUAR 2010
BLATT 14

# Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

## Aufgabe 50: Ein Beispiel zur direkten Methode der Variationsrechnung

Sei $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,

$$I(u) = \int_U \left(|\nabla u|^6 + |u|^2\right) \text{ auf } \mathcal{A} = \{u \in W^{1,6}(U) : \ u = 1 \text{ auf } \partial U\}.$$

a) Zeigen Sie: Für $V \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\alpha > 1$ ist $V \ni z \mapsto |z|^\alpha$ strikt konvex.
*Tipp:* Vewenden Sie (Begründungen?), dass $[0, \infty) \ni t \mapsto t^\alpha$ strikt konvex ist, sowie dass $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $z_2 \neq \lambda z_1 \ \forall \lambda > 0$ gilt.

b) Beweisen oder widerlegen Sie:
   i) $I$ besitzt einen Minimierer.
   ii) $I$ besitzt höchstens einen Minimierer.

c) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung her. Sind Minima schwache Lösungen?

## Aufgabe 51: Ein Randwertproblem ohne Lösung

Auf $H_0^1(0,1)$ sei das Funktional

$$I(u) := \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 \cdot u'(x)^2 - u(x)\right) dx$$

gegeben. Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$I(u) = \min_{v \in H_0^1(0,1)} I(v). \tag{1}$$

a) Wie lautet das zu (1) gehörige Randwertproblem?

b) Begründen Sie, dass das Variationsproblem (1) keine Lösung besitzt.

c) Welche Voraussetzungen des Satzes von Lax-Milgram verletzt hier die zum Randwertproblem gehörige Bilinearform $B(u, v)$?

**Wir bedanken uns für Eure Mitarbeit an Vorlesung und Übungen**
**— insbesondere allen die aktiv mitgewirkt haben! —**
**und wünschen allen viel Erfolg bei der Prüfung (15.2., 15.00 h, MW 1050)!**