PROF. DR. BERND SCHMIDT
DR. JOHANNES GIANNOULIS

26. JANUAR 2010
BLATT 13

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 46: Noch ein Differentialoperator

Sei $Lu = -\partial_1(\partial_1 u + x_1^2 \partial_2 u) - \partial_2(x_1^2 \partial_1 u + \partial_2 u) + 4u$. Untersuchen Sie die Gleichung

$$Lu = \cos(x_1 x_2) \text{ in } B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2, \quad u = 0 \text{ auf } \partial U$$

auf Existenz, Eindeutigkeit und Regularität der Lösung (falls existent).

Aufgabe 47: Die biharmonische Gleichung

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt.

a) Sei $H_0^k(U) := \overline{C_c^\infty(U)}^{H^k(U)}$. Zeigen Sie, dass

$$\|u\|_{H_0^k(U)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{L^2(U)}^2 \right)^{1/2}$$

eine zur H^k-Norm äquivalente Norm auf $H_0^k(U)$ definiert.

b) $u \in H_0^2(U)$ heisst schwache Lösung der *biharmonischen Gleichung*

$$\Delta^2 u = f \text{ in } U, \quad u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial U, \tag{1}$$

wenn

$$\int_U \Delta u \Delta v = \int_U f v \quad \forall\, v \in H_0^2(U).$$

Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^2(U)$ genau eine schwache Lösung von (1) existiert.
Tipp: Verwenden Sie den Satz von Lax-Milgram. Dabei kann die Gleichung

$$\int_U (\Delta u)^2 = \int_U |D^2 u|^2 \quad \forall u \in C_c^\infty(U)$$

(Begründung?) nützlich sein.

Aufgabe 48: Die Poincarésche Ungleichung mit Mittelwerten

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt und zusammenhängend mit C^1-Rand, $1 \le p \le \infty$. Dann gibt es $C = C(U, n, p) \in \mathbb{R}$, so dass

$$\left\| u - ⨍_U u\, dx \right\|_{L^p(U)} \le C \|\nabla u\|_{L^p(U)} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(U).$$

Gehen Sie zum Beweis wie folgt vor:
Nehmen Sie an, die Aussage wäre falsch. Konstruieren Sie darauf basierend eine Folge $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von $W^{1,p}(U)$-Funktionen mit $⨍_U v_k\, dx = 0$, $\|v_k\|_{L^p(U)} = 1$ und $\|\nabla v_k\|_{L^p(U)} < 1/k$ für $k \in \mathbb{N}$. Führen Sie dies mittels Aufgabe 44 zum Widerspruch.

Aufgabe 49: Eine Poisson-Gleichung auf der punktierten Kreisscheibe

Es sei $U := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|x\|_2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie das Dirichlet-Problem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& -1 & \text{in } U, \\ u &=& 0 & \text{auf } \partial U. \end{array} \right. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass (2) *keine klassische* Lösung $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ hat.
Tipp: Folgern Sie aus der Symmetrie des Problems mit Hilfe von Aufgabe 4, dass eine solche Lösung von der Form $u(x) = v(\|x\|_2)$ sein müsste. Dies führt auf eine gewöhnliche Dgl. für v.

b) Beweisen Sie, dass das Dirichlet-Problem (2) *genau eine schwache* Lösung besitzt. Geben Sie diese explizit an.