Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 42: Verknüpfung kompakter mit stetigen Operatoren

Seien $X, Y.Z$ Banachräume und $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$ lineare Operatoren. Zeigen Sie:

a) T kompakt, S stetig $\Rightarrow S \circ T$ kompakt.

b) T stetig, S kompakt $\Rightarrow S \circ T$ kompakt.

Aufgabe 43: Ein Differentialoperator

Sei $Lu = -\partial_1^2 u - \partial_2^2 u - x_1 \partial_1 \partial_2 u + 2u$ auf $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$.

a) Ist L gleichmäßig elliptisch?

b) Untersuche die zugehörige Bilinearform auf Koerzivität.

Aufgabe 44: Die Einbettung $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U)$

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $1 \leq p \leq \infty$. Beweisen Sie:

a) Die Einbettung $E : W_0^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U),\ u \mapsto u$, ist kompakt.

b) Hat U einen C^1-Rand, so ist sogar die Einbettung $E : W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U)$ kompakt.

Tipp: Fallunterscheidung für verschiedene $\frac{n}{p}$. Benutzen Sie passende Aussagen aus der Vorlesung!

Aufgabe 45: Der Raum $H^{-1}(U)$

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. $H^{-1}(U)$ bezeichne den Dualraum des Hilbertraumes $H_0^1(U)$ (welchen wir *nicht* mit $H_0^1(U)$ selbst identifizieren!), versehen mit der Operatornorm. Zeigen Sie:

a) Für beliebige $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U)$ wird durch

$$f(u) := \int_U f^0 u + \sum_{k=1}^n f^k u_{x_k} \, dx,\ u \in H_0^1(U), \tag{1}$$

ein stetiger linearer Operator $f \in H^{-1}(U)$ definiert.

b) Es sei $f \in H^{-1}(U)$. Dann gibt es Funktionen $f^0, f^1, \ldots, f^n \in L^2(U)$, so dass f durch Gleichung (1) gegeben ist.
Tipp: Rieszscher Darstellungssatz.

c) Die Operatornorm auf $H^{-1}(U)$ lässt sich äquivalent schreiben als

$$\|f\|_{H^{-1}(U)} = \inf \left\{ \left(\sum_{k=0}^n \left\| f^k \right\|_{L^2(U)}^2 \right)^{1/2} \;\middle|\; f^0, \ldots, f^n \in L^2(U) \text{ erfüllen } (1) \right\}.$$