Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

12. Januar 2010
Blatt 11

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 38: Eine relativkompakte Funktionenmenge

Sei $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $A := \{u \in W_0^{1,1}(U) : \ |\nabla u(x)| \le |x|^{-1}$ für f.a. $x \in U\}$.
Zeigen Sie: A ist relativkompakt in $L^q(U)$ für alle $1 \le q < \infty$.

Aufgabe 39: Der eindimensionale Laplace-Operator

Es sei $1 \le p < \infty$. Betrachten Sie den *Laplace-Operator*

$$\Delta : W_0^{2,p}(0,1) \to L^p(0,1), \ u \mapsto \Delta u = u''.$$

a) Zeigen Sie, dass Δ ein (stetiger) Isomorphismus ist.

b) Zeigen Sie, dass $\Delta^{-1} : L^p(0,1) \to L^p(0,1)$ kompakt ist.
(*Bemerkung:* Mit etwas Funktionalanalysis lässt sich leicht zeigen, dass $\Delta^{-1} : L^p(0,1) \to W_0^{2,p}(0,1)$ *nicht* kompakt ist.)

Aufgabe 40: Gleichgradige Stetigkeit auf kompakten Mengen

Es seien $V \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f_k \in C(V), k \in \mathbb{N}$, gleichgradig stetige Funktionen, d.h.

$$\forall x \in V \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall y \in V : \quad \|x - y\| < \delta \ \Rightarrow \ |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon.$$

Begründen Sie, dass die $f_k, k \in \mathbb{N}$, sogar *gleichmäßig* gleichgradig stetig auf V sind.

Aufgabe 41: Der Satz von Arzelà-Ascoli

Es seien (M, d) ein kompakter metrischer Raum und $K \subset C(M)$, wobei $C(M)$ mit der sup-Norm versehen sei. Dann ist K relativkompakt genau dann, wenn K

- beschränkt ist: $\exists\, C > 0 : \|f\|_\infty \le C \,\forall\, f \in K$ und
- gleichgradig stetig ist:

$$\forall\, x \in M \,\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall\, y \text{ mit } d(y,x) < \delta \,\forall\, f \in K.$$

Tipp: Zeigen Sie, dass K totalbeschränkt ist wie folgt.

a) Zu $\varepsilon > 0$ wählen Sie δ gemäß der gleichmäßig gleichgradigen Stetigkeit von K. Nutzen Sie dann die Kompaktheit von M, um ein δ-Netz

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\delta(m_i)$$

zu finden.

b) Für $z > 0$ so groß, dass $K \subset B_z(0)$ gilt, betrachten Sie die Zerlegung $-z = z_0 < z_1 < \ldots < z_\nu = z$ mit $z_i - z_{i-1} < \varepsilon$. Betrachten Sie die Indexmenge $\{1, \ldots, \nu\}^N$ und wählen Sie $f_{(j_1,\ldots,j_N)}$, so dass $f_{(j_1,\ldots,j_N)}(m_i) \in [z_{j_i - 1}, z_{j_i}]$ für alle i gilt, wenn das möglich ist.