Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

22. Dezember 2009
Blatt 10

Partielle Differentialgleichungen

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 33: Die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung für $\mathbf{p = 1}$

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.15 aus der Vorlesung:
Zeigen Sie, dass für $k = 1, \ldots n$ und $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |u(x_1, \ldots, x_n)|^{\frac{n}{n-1}} \, dx_1 \cdots dx_k \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_n)| \, dx_1 \cdots dx_k \right)^{\frac{k}{n-1}} \times \\
&\qquad \times \prod_{i=k+1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)| \, dx_1 \cdots dx_k \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} .
\end{aligned}$$

(Für $k = n$ ist das leere Produkt als 1 zu verstehen.)

Tipp: Zeigen Sie dies durch vollständige Induktion nach k. Dabei ist die *allgemeine Höldersche Ungleichung*

$$\int |f_1 \cdot \ldots \cdot f_m| \leq \prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{L^{p_j}}, \qquad \text{wenn } \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

hilfreich.

Aufgabe 34: Die Poincaré-Ungleichung für Dirichlet-Randbedingungen

Beweisen Sie Satz 4.19 aus der Vorlesung: Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand, $1 \leq p \leq \infty$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C \|Du\|_{L^p(U)} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(U)$$

gilt.

Aufgabe 35: $\mathbf{W^{1,n} \not\subset L^\infty}$ für $\mathbf{n \geq 2}$

Es sei $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $u(x) := \log\log(1 + \frac{1}{|x|})$ in $W^{1,n}(U)$, nicht jedoch in $L^\infty(U)$ liegt, wenn $n \geq 2$ ist. (Stimmt das auch für $n = 1$?)

Aufgabe 36: Hölder-Räume

Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0,1]$ und $p \in (1,\infty]$.

a) Beweisen Sie, dass der Hölder-Raum

$$\left(C^{k,\gamma}(\overline{U}), \|\cdot\|_{C^{k,\gamma}(\overline{U})}\right)$$

ein Banachraum ist.

b) Es sei nun $\alpha \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Funktion

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ u(x) := \|x\|_2^\alpha .$$

Wann gilt $u \in V$ für

$$V = C^{0,\gamma}(\overline{B_1(0)}), C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n \backslash B_1(0)), W^{1,p}(B_1(0)), W^{1,p}(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_1(0)})?$$

Hinweis: Diese Frage wurde zum Teil schon in der Vorlesung erörtert.

Aufgabe 37*: Absolutstetige Funktionen und schwache Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^1$

Eine Funktion $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ heißt *absolutstetig*, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \ldots < a_n < b_n < 1$, $n \in \mathbb{N}$ beliebig, die Implikation

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}|u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon$$

gilt. Der Satz von Radon-Nikodým impliziert, dass eine gegebene Funktion $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ genau dann absolutstetig ist, wenn sie eine Darstellung

$$u(t) - u(s) = \int_s^t u'\,dx, \quad \forall s,t \in (0,1)$$

mit $u' \in L^1(0,1)$ besitzt. In diesem Fall ist u dann auch (im "klassischen" Sinn) fast überall differenzierbar mit Ableitung u'.

Bemerkung: Dieser HDI für das Lebesgue-Integral sollte Ihnen aus der Maßtheorie bekannt sein.

a) Beweisen Sie, dass sich die $W^{1,p}$-Funktionen *einer Variable*, $1 \le p \le \infty$, durch folgende Glattheitseigenschaft charakterisieren lassen:
Eine Funktion $u : (0,1) \to \mathbb{R}$ liegt in $W^{1,p}(0,1)$ genau dann, wenn sie absolutstetig ist mit Ableitung $u' \in L^p(0,1)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $u \in W^{1,p}(0,1)$ mit $1 < p \le \infty$ die Ungleichung

$$|u(x) - u(y)| \le |x-y|^{1-\frac{1}{p}} \|u'\|_{L^p(0,1)}$$

für fast alle $x, y \in [0,1]$ erfüllen.
Bemerkung: Vergleichen Sie mit der Sobolev-Ungleichung für $p > n$.

***Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**