Prof. Dr. Bernd Schmidt
Dr. Johannes Giannoulis

20. Oktober 2009
Blatt 1

Partielle Differentialgleichungen I

im Wintersemester 2009/10

Aufgabe 1: Eine modifizierte Transportgleichung

Betrachten Sie zu gegebenen $c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + Du \cdot b + cu = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases} \tag{1}$$

a) Geben Sie dem Gleichungssystem (1) analog zur Vorlesung (Transportgleichung) eine anschauliche Interpretation, indem Sie die Differentialgleichung formal integrieren. Was ist die qualitative Bedeutung des Zusatzterms "cu"?

b) Für das Anfangswertproblem (1) soll nun ebenfalls eine explizite Lösung gefunden werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:
Finden Sie (z.B. ausgehend von Teil a) oder direkt anhand der Gleichung (1)) geeignete Kurven $\gamma_x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$, $\gamma_x(0) = (x,0)$, so dass die partielle Differentialgleichung (1) für u dort in eine gewöhnliche Differentialgleichung für

$$z_x(s) := u(\gamma_x(s)), \; s \geq 0$$

übergeht. Lösen Sie letztere und schließen Sie daraus auf u.
Formulieren Sie anschließend die entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für das AWP (1) und beweisen Sie diese.

Aufgabe 2: Volumina von Kugeln und Sphären

Es seien $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung des n-dimensionalen Volumens $|B_r(y)|$ der (euklidischen) n-Kugel $B_r(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x-y\|_2 \leq r\}$, sowie des $(n-1)$-dimensionalen Volumens $|\partial B_r(y)|$ der zugehörigen $(n-1)$-Sphäre $\partial B_r(y)$, also der beiden Integrale

$$|B_r(y)| = \int_{B_r(y)} 1\,dx \quad \text{und} \quad |\partial B_r(y)| = \int_{\partial B_r(y)} 1\,dS.$$

Poincaré hat dazu folgenden Weg vorgeschlagen:

a) Reduzieren Sie das Problem auf die Berechnung des Volumens ω_n der Einheitskugel

$$\omega_n := |B_1(0)| = \int_{B_1(0)} 1\,dx.$$

b) Die Eulersche Gammafunktion $\Gamma(z)$ hat bekanntlich auf der rechten komplexen Halbebene $\mathbb{H}_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\}$ die Integraldarstellung

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,dt,$$

und erfüllt dort die Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in \mathbb{H}_r$ (falls Sie das noch nicht wissen, rechnen Sie kurz nach).

Zeigen Sie unter Benutzung der Formel $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ für das Gauß-Integral die Identität

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}, \tag{2}$$

indem Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_2^2}\,dx$$

auf zwei verschiedene Arten berechnen.

c) Folgern Sie aus (2):

$$\omega_{2m+1} = \frac{2^{2m+1}m!}{(2m+1)!}\pi^m,\ m \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad \omega_{2m} = \frac{\pi^m}{m!},\ m \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3: Partielle Integration und die Greenschen Formeln

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit C^1-Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld ν. Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe des Gaußschen Satzes:

a) Sind $f, g \in C^1(\overline{U})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\nu^i := \langle \nu, e_i \rangle$, so gelten

$$\int_U f_{x_i} dx = \int_{\partial U} f\nu^i\,dS,$$

$$\int_U f_{x_i} g dx = \int_{\partial U} fg\nu^i\,dS - \int_U fg_{x_i}\,dx.$$

b) Sind $f, g \in C^2(\overline{U})$ und bezeichnet $\partial_\nu h := Dh \cdot \nu$ die Richtungsableitung einer differenzierbaren Funktion h entlang des Vektorfelds ν, so gelten die *Greenschen Formeln*

$$\int_U \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle\,dx = \int_{\partial U} f\partial_\nu g\,dS - \int_U f\Delta g\,dx,$$

$$\int_U (f\Delta g - g\Delta f)\,dx = \int_{\partial U} (f\partial_\nu g - g\partial_\nu f)\,dS.$$

Aufgabe 4: Transformationsinvarianz der Laplacegleichung

Es sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine *euklidische Bewegung*, also eine affin-lineare Abbildung

$$Tx := Qx + a,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

mit orthogonalem $Q \in O(n)$ und beliebigem $a \in \mathbb{R}^n$.
Beweisen Sie, dass für alle $u \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, gilt:

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T.$$

Was bedeutet das speziell für Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$?