Aufgabe 1 (6 Punkte)

Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\partial_1 u + u\,x_2^3\,\partial_2 u = u^2 \text{ in } \Omega, \quad u(x) = 1 \text{ auf } S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung Ω von S eine eindeutige Lösung u besitzt und berechnen Sie diese explizit.

Lösungsvorschlag

S wird durch die Abbildung $\varphi : (0,\infty) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(s) = (0,s)$ parametrisiert. Mit $a(x,y) = (1, y\,x_2^3)$, $b(x,y) = y^2$ und $g(0,s) = 1$ lässt sich das Problem in der Form

$$a_1(x,u)\partial_1 u + a_2(x,u)\partial_2 u = b(x,u) \text{ in } \Omega, \quad u(x) = g(x) \text{ auf } S$$

schreiben. Die PDG ist also insbesondere quasilinear. Da

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial s}(s) & a_1(\varphi(s), g(\varphi(s))) \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial s}(s) & a_2(\varphi(s), g(\varphi(s))) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2(\varphi(s), g(\varphi(s))) \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

gilt, ist das gegebene Cauchyproblem nichtcharakteristisch.
Nach Satz 3.3 aus der VL existiert nun auf einer hinreichend kleinen Umgebung von S eine eindeutige Lösung des Cauchyproblems, das sich explizit durch Integration der charakteristischen Gleichungen ergibt. Diese sind

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x,y) = 1, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2(x,y) = y\,x_2^3 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = y^2$$

mit den Startbedingungen

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = s, \quad \text{und} \quad y(0) = 1.$$

Es folgt $x_1(s,t) = t$ und

$$\int_1^{y(s,t)} \frac{1}{y^2}dy = -\frac{1}{y}\bigg|_{y=1}^{y(s,t)} = -\frac{1}{y(s,t)} + 1 = t \quad \Leftrightarrow \quad y(s,t) = \frac{1}{1-t}.$$

Aus $x_1(s,t) = t$ folgt für die Inverse von $(s,t) \mapsto (x_1(s,t), x_2(s,t))$, dass $t(x) = x_1$, und damit

$$u(x) = y(s(x), t(x)) = \frac{1}{1-t(x)} = \frac{1}{1-x_1}.$$

(Die explizite Formel lässt sich natürlich auch durch direktes Nachrechnen verifizieren.)

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)

a) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf ihre schwache Differenzierbarkeit und geben Sie gegebenenfalls ihre schwachen Ableitungen $\partial_1 u$, $\partial_2 u$ an:

$$u(x) = \begin{cases} x_1 + \alpha & \text{für } x_1 > 0, \\ 0 & \text{für } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

b) Es seien $p, q \in [1, \infty)$ und $C > 0$ eine Konstante, so dass

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall\, u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$$

gelte. Zeigen Sie, dass dann $p < n$ und $q = p^*$ gilt.

Lösungsvorschlag

a) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert $\partial_2 u$ und es ist $\partial_2 u \equiv 0$. Für $\alpha = 0$ existiert auch $\partial_1 u$ mit $\partial_1 u = v$, wobei

$$v(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{für } x_1 \leq 0 \end{cases}$$

ist. Für $\alpha \neq 0$ ist jedoch u nicht schwach nach x_1 differenzierbar.
Begründung: Ist $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$, so gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx &= \int_{\{x_1 \leq 0\}} u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx + \int_{\{x_1 > 0\}} u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx \\ &= \int_{\{x_1 > 0\}} (x_1 + \alpha)\, \partial_i \varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Für $i = 2$ ist daher

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\, \partial_2 \varphi(x)\, dx = \int_0^\infty (x_1 + \alpha) \int_{-\infty}^\infty \partial_2 \varphi \, dx_2\, dx_1 = 0.$$

Für $i = 1$ ergibt sich mit partieller Integration $\int_0^\infty (x_1 + \alpha) \partial_1 \varphi(x_1, x_2)\, dx_1 = \alpha \varphi(0, x_2) - \int_0^\infty \varphi(x_1, x_2)\, dx_1$ und daher

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x)\, \partial_1 \varphi(x)\, dx = \alpha \int_{-\infty}^\infty \varphi(0, x_2)\, dx_2 - \int_{\mathbb{R}^2} v(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Das zeigt insbesondere $\partial_1 u = v$ im Falle $\alpha = 0$. Existierte nun $\partial_1 u = w \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$ für ein $\alpha \neq 0$, so wäre

$$-\int_{\mathbb{R}^2} w(x)\, \varphi(x)\, dx = \alpha \int_{-\infty}^\infty \varphi(0, x_2)\, dx_2 - \int_{\mathbb{R}^2} v(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Setzt man hier für φ eine Folge φ_k mit $\varphi_k(0, t) = 1$ für alle $t \in [0, 1]$ und $\|\varphi_k\|_\infty \leq 1$, $\operatorname{supp} \varphi_k \subset [-1/k, 1/k] \times [-1/k, 1 + 1/k]$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ein, so ergibt sich der Widerspruch

$$\alpha = \lim_{k \to \infty} \alpha \int_{-\infty}^\infty \varphi(0, x_2)\, dx_2 = \lim_{k \to \infty} \int_{-1/k}^{1/k} \int_{-1/k}^{1+1/k} (v(x) - w(x))\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

b) Ist $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, so definiere die mit $\lambda > 0$ skalierte Funktion u_λ durch

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x).$$

Dann ist

$$\|u_\lambda\|_{L^q} = \left(\int |u(\lambda x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\lambda^{-n} \int |u(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} = \lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q},$$
$$\|\nabla u_\lambda\|_{L^p} = \left(\int |\lambda \nabla u(\lambda x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lambda^{p-n} \int |\nabla u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}.$$

Da auch $u_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ für alle $\lambda > 0$ ist, folgt

$$\lambda^{-\frac{n}{q}} \|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall \lambda > 0,$$

d.h.

$$\|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall \lambda > 0.$$

Das aber ergibt einen Widerspruch, wenn man in diesem Ausdruck $\lambda \to 0$ oder $\lambda \to \infty$ gehen lässt, wenn nicht der Exponent $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$, d.h.

$$q = p^* := \frac{np}{n-p}$$

ist. Da $q \geq 1 > 0$ ist, muss zudem $p < n$ sein.

Aufgabe 3 (2+5+3=10 Punkte)

Es sei $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha \geq 0$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\alpha\partial_1^2 u - 2\partial_2^2 u - 2\partial_3^2 u - 2\sin x_1 \partial_2\partial_3 u = \arctan(x_2 x_3) \quad \text{in } U, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial U. \tag{1}$$

a) Geben Sie für $\alpha > 0$ die schwache Formulierung dieses Randwertproblems an.

b) Beweisen Sie, dass das Problem für $\alpha > 0$ eine eindeutige schwache Lösung u besitzt. Gilt $u \in C^\infty(\overline{U})$?

c) Untersuchen Sie die zu (1) gehörige Bilinearform im Fall $\alpha = 0$ auf Koerzivität.

Lösungsvorschlag

a) Ist $A^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})$ die (symmetrische) Matrix $A^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \sin x_1 \\ 0 & \sin x_1 & 2 \end{pmatrix}$, so schreibt sich (1) als

$$-\operatorname{div}(A^{(\alpha)}\nabla u) = \arctan x_2 x_3.$$

Die zugehörige Bilinearform ist $B_\alpha(u,v) = \int_U \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}^{(\alpha)}\, \partial_i u\, \partial_j v$. Die schwache Formulierung von (1) ist also: u ist eine schwache Lösung von (1), wenn $u \in H_0^1(U)$ der Bedingung

$$B_\alpha(u,v) = \int_U \arctan(x_2 x_3) v \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

bzw.

$$\int_U \alpha\partial_1 u\, \partial_1 v + 2\partial_2 u\, \partial_2 v + 2\partial_3 u\, \partial_3 v + \sin x_1 \partial_2 u\, \partial_3 v + \sin x_1 \partial_3 u\, \partial_2 v = \int_U \arctan(x_2 x_3) v \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

genügt.

b) Die Abbildung $x \mapsto \arctan(x_2 x_3)$ liegt in $L^2(U)$. Des Weiteren sind alle Koeffizienten der Gleichung beschränkt und B_α somit stetig. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} &\xi^T A^{(\alpha)} \xi = \alpha\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 + 2\sin x_1 \xi_2 \xi_3 \geq \alpha\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 - 2|\xi_2||\xi_3| \\ &= \alpha\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + (|\xi_2| - |\xi_3|)^2 \geq \min\{\alpha, 1\}|\xi|^2, \end{aligned}$$

so dass der untersuchte Operator gleichmäßig elliptisch und B_α für $\alpha > 0$ auch koerziv ist:

$$B(u,u) \geq \min\{\alpha, 1\} \int_U |\nabla u|^2 = \min\{\alpha, 1\} \|u\|_{H_0^1}.$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram (oder direkt nach Satz 5.11 aus der VL) existiert demnach eine eindeutige schwache Lösung u des Problems. Es gilt $u \in C^\infty(\overline{U})$, da alle $a_{ij}^{(\alpha)}$ sowie die Abbildung $x \mapsto \arctan(x_2 x_3)$ in $C^\infty(\overline{U})$ liegen und ∂U auch C^∞-glatt ist.

c) Betrachte $u_k(x) = \chi(x)\cos(k\pi x_1)$, wobei $\chi \in C_c^\infty(B_1)$ mit $\chi \equiv 1$ auf $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^3$ sei. Es gilt

$$\nabla u_k = \cos(k\pi x_1)\nabla\chi - \chi(x)\pi k \sin(k\pi x_1)(1,0,0).$$

und daher

$$\left|\nabla u_k A^{(\alpha=0)}(\nabla u_k)^T\right| = \left|2|\partial_2 u_k|^2 + 2|\partial_3 u_k|^2 + 2\sin x_1 \partial_2 u_k \partial_3 u_k\right| \leq C$$

für eine von k unabhängige Konstante $C > 0$, so dass

$$B_{\alpha=0}(u_k, u_k) = \int_U \nabla u_k A^{(\alpha=0)}(\nabla u_k)^T \, dx_1 dx_2 dx_3 \leq C$$

gilt. Andererseits ist

$$\|u_k\|^2_{H_0^1(U)} \geq \int_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^3} |\nabla u_k|^2 = \pi^2 k^2 \int_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})^3} \sin^2(k\pi x_1) dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\pi^2 k^2}{2}.$$

Insbesondere gibt es keine Konstante $c > 0$ mit $B(u_k, u_k) \geq c\|u_k\|_{H_0^1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (4+4=8 Punkte)

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge und $u \in C^2(U \times (0,\infty)) \cap C(\overline{U} \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangs-/Randwertproblems

$$\partial_t u = \Delta u \text{ in } U \times (0,\infty), \quad u(\cdot,0) = u_0 \text{ auf } U, \quad u = 0 \text{ auf } \partial U \times [0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass u nicht-negativ ist, wenn die Startwerte u_0 nicht-negativ sind.

b) Gilt eine entsprechende Aussage auch für die Wellengleichung?

Lösungsvorschlag

a) Nach dem Minimumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung (Skript Satz 2.27 und Bemerkung 2.28,2) gilt

$$\min u \geq \min_{\overline{U}\times\{0\}\cup\partial U\times[0,\infty)} u \geq \min\{\min u_0, 0\} \geq 0.$$

b) Selbst für die eindimensionale Wellengleichung muss das nicht gelten: Ist $U = (0,\pi)$ und $u_0(x) = \sin x$, so löst $u(x,t) = \cos t \sin x$ die das Anfangs-/Randwertproblem

$$\partial_t^2 u = \partial^2 u \text{ in } U \times (0,\infty), \quad u(\cdot,0) = u_0 \text{ auf } U, \quad u = 0 \text{ auf } \partial U \times [0,\infty).$$

Jedoch ist $u(x, \frac{\pi}{2}) = -\sin x < 0$ sogar für alle $x \in U$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden die jeweils **richtige Aussage** an.
Jede korrekte Antwort wird mit *1 Punkt*, jede falsche Anwort mit *-1 Punkt* und jede unbeantwortete Frage mit *0 Punkten* bewertet.
Die minimale Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe beträgt *0 Punkte*.

Lösung:

Die Oberfläche S^{n-1} der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist eine für den Laplace-Operator charakteristische Hyperfläche.	☐ Ja ■ Nein
Ist $u \in C^2(\overline{U} \times [0, \infty))$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $U \times (0, \infty)$, so ist $u \in C^\infty(U \times (0, \infty))$.	■ Ja ☐ Nein
Ist $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$, $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, eine Lösung der Wellengleichung und hat $u(\cdot, 0)$ kompakten Träger, so hat auch $u(\cdot, t)$ kompakten Träger für jedes feste $t > 0$.	■ Ja ☐ Nein
Für $U \subset \mathbb{R}^{2009}$ offen, beschränkt mit C^1-Rand ist die Menge $\left\{ f \in C_c^\infty(U) \mid \int_U \lvert \nabla f(x) \rvert^{2010} \leq 1 \right\}$ relativkompakt in $C(\overline{U}, \lVert \cdot \rVert_\infty)$.	■ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lvert \sin x \rvert$ ist schwach differenzierbar.	■ Ja ☐ Nein
Das Funktional $u \mapsto \int_{B_1(0)} (\lvert \nabla u \rvert - 1)^2$, $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, besitzt einen eindeutigen Minimierer in $\{v \in W^{1,\infty}(B_1(0)) \mid u(x) = 0 \text{ für } \lvert x \rvert = 1\}$.	☐ Ja ■ Nein
Zu jedem offenen beschränkten Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ mit C^1-Rand gibt es eine Funktion $f \in L^2(U)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass das Randwertproblem $-\Delta u = f$ in U, $u = 0$ auf ∂U keine schwache Lösung besitzt.	■ Ja ☐ Nein
Unendlich oft schwach differenzierbare Funktionen sind auch unendlich oft klassisch differenzierbar.	■ Ja ☐ Nein

Begründungen

a) Der Laplace-Operator ist elliptisch, die zugehörige charakteristische Varietät leer.

b) Nach Skript Satz 2.33.

c) Störungen breiten sich nur mit endlicher Geschwindigkeit aus, vgl. Skript Bemerkung 2.39, Nummern 1 und 2.

d) Nach der Poincaréschen Ungleichung ist die fragliche Menge in $W^{1,2010}(U)$ beschränkt und nach der Sobolev-Ungleichung für $p > n$ (Skript Satz 4.24) demnach beschränkt in $C^{0,\gamma}(\overline{U})$ (für $\gamma = 1 - \frac{2009}{2010} = \frac{1}{2010}$). Nach dem Satz von Arzela-Ascoli ist ist sie dann relativkompakt in $C(\overline{U}, \lVert \cdot \rVert_\infty)$.

e) Ähnlich wie man zeigt, dass $x \mapsto |x|$ schwach differenzierbar ist (s. Skript).

f) Z.B. sind sowohl $x \mapsto 1 - |x|$ als auch $x \mapsto |x| - 1$ Minimierer.

g) Ist λ ein Eigenwert von $-\Delta$, so hat $Lu = 0$, wobei $Lu := -\Delta u - \lambda u$ ist, eine nicht-triviale Lösung. Nach der Fredholmschen Alternative gibt es also ein $f \in L^2(U)$, so dass $L^*u = f$ keine Lösung hat. Nun ist aber $L = L^*$.

h) Das folgt aus dem Sobolevschen Einbettungssatz.