Aufgabe 1 (6 Punkte)

Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$u\,\partial_1 u + x_2^2\,\partial_2 u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x) = x_2 \text{ auf } S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$$

in einer hinreichend kleinen Umgebung Ω von S eine eindeutige Lösung u besitzt und berechnen Sie diese explizit.

Lösungsvorschlag

S wird durch die Abbildung $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(s) = (0, s)$ parametrisiert. Mit $a(x, y) = (y, x_2^2)$ und $g(0, s) = s$ lässt sich das Problem in der Form

$$a_1(x, u)\partial_1 u + a_2(x, u)\partial_2 u = 0 \text{ in } \Omega, \quad u(x) = g(x) \text{ auf } S$$

schreiben. Die PDG ist also insbesondere quasilinear. Da

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}(s) & a_1(\varphi(s), g(\varphi(s))) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}(s) & a_2(\varphi(s), g(\varphi(s))) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & g(0, s) \\ 1 & \varphi_2^2(s) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & s^2 \end{pmatrix} = -s \neq 0$$

gilt ist das gegebene Cauchyproblem nichtcharakteristisch.
Nach Satz 3.3 aus der VL existiert nun auf einer hinreichend kleinen Umgebung von S eine eindeutige Lösung des Cauchyproblems, das sich explizit durch Integration der charakteristischen Gleichungen ergibt. Diese sind

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1(x, y) = y, \quad \frac{dx_2}{dt} = a_2(x, y) = x_2^2 \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dt} = 0$$

mit den Startbedingungen

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = s, \quad \text{und} \quad y(0) = s.$$

Es folgt der Reihe nach $x_2(s, t) = \frac{s}{1-st}$, $y(s, t) = s$ und $x_1(s, t) = st$.
Wir invertieren nun die Abbildung $(s, t) \mapsto (x_1(s, t), x_2(s, t))$. Wegen $x_2 = \frac{s}{1-x_1}$ ergibt sich $s = x_2(1 - x_1)$ (und dann auch $t = \frac{x_1}{s} = \frac{x_1}{x_2(1-x_1)}$). Eingesetzt in y folgt schließlich

$$u(x, t) = y(s(x), t(x)) = s(x) = x_2(1 - x_1).$$

(Die explizite Formel lässt sich natürlich auch durch direktes Nachrechnen verifizieren: $u\,\partial_1 u + x_2^2\,\partial_2 u = -x_2(1 - x_1)x_2 + x_2^2(1 - x_1) = 0$, $u(0, x_2) = x_2$.)

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

a) Es seien $u_1, \dots, u_n \in C^2(\mathbb{R} \times (0,\infty))$ Lösungen der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(y,t) = \partial_y^2 u(y,t) \text{ in } \mathbb{R} \times (0,\infty).$$

Zeigen Sie, dass

$$u(x,t) = u_1(x_1,t) \cdot \ldots \cdot u_n(x_n,t) \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$$

die n-dimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u(x,t) = \Delta_x u(x,t) \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$$

löst.

b) Gilt eine entsprechende Aussage auch für die Wellengleichung? Begründen Sie Ihre Antwort entweder durch einen Nachweis wie in a) oder durch ein Gegenbeispiel!

Lösungsvorschlag

a) Die Produktregel zeigt

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) = \partial_t\Big(u_1(x_1,t) \cdot \ldots \cdot u_n(x_n,t)\Big) &= \sum_{1 \le i \le n} \partial_t u_i(x_i,t) \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} u_j(x_j,t) \\
&= \sum_{1 \le i \le n} \partial_{x_i}^2 u_i(x_i,t) \prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} u_j(x_j,t) = \sum_{1 \le i \le n} \partial_{x_i}^2 \Big(u_1(x_1,t) \cdot \ldots \cdot u_n(x_n,t)\Big) \\
&= \Delta_x u(x,t).
\end{aligned}$$

b) Für die Wellengleichung gilt eine solche Formel nicht: Setze z.B. $u_1(y,t) = u_2(y,t) = t$. Dann ist

$$\partial_t^2 u_1 = \partial_y^2 u_1 = \partial_t^2 u_2 = \partial_y^2 u_2 = 0,$$

jedoch

$$(\partial_t^2 - \Delta_x) u(x,t) = (\partial_t^2 - \Delta_x)\left(t^2\right) = 2 \ne 0.$$

für $u(x) = u_1(x_1,t)\, u_2(x_2,t)$.

Aufgabe 3 (2+5+3+2=12 Punkte)

Es sei $U = B_\rho(0) \subset \mathbb{R}^3$ $(\rho > 0)$ und $c \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Randwertproblem

$$-\partial_1\left((2+\cos x_3)\partial_1 u\right) - 2\partial_2^2 u - 2\partial_3^2 u - 2\partial_2\partial_3 u + cu = e^{x_2} \quad \text{in } U, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial U. \tag{1}$$

a) Geben Sie die schwache Formulierung dieses Randwertproblems an.

b) Beweisen Sie, dass das Problem für $c \geq 0$ eine eindeutige schwache Lösung u besitzt. Gilt $u \in C^\infty(\overline{U})$?

c) Zeigen Sie, dass eine von ρ unabhängige Konstante $C_1 > 0$ existiert, so dass

$$\|u\|_{L^2(U)} \leq C_1\rho \, \|\nabla u\|_{L^2(U)} \quad \forall u \in H_0^1(U).$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe von c), dass zu jedem $c \in \mathbb{R}$ ein $\rho_c > 0$ existiert, so dass (1) eine schwache Lösung in $U = B_\rho(0)$ besitzt für alle $0 < \rho \leq \rho_c$.

Lösungsvorschlag

a) Ist $A = (a_{ij})$ die (symmetrische) Matrix $A = \begin{pmatrix} 2+\cos x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, so schreibt sich (1) als

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + cu = e^{x_2}.$$

Die zugehörige Bilinearform ist $B(u,v) = \int_U \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}\,\partial_i u\,\partial_j v + c\,u\,v$. Die schwache Formulierung von (1) ist also: u ist eine schwache Lösung von (1), wenn $u \in H_0^1(U)$ der Bedingung

$$B(u,v) = \int_U e^{x_2} v \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

bzw.

$$\int_U (2+\cos x_3)\partial_1 u\,\partial_1 v + 2\partial_2 u\,\partial_2 v + 2\partial_3 u\,\partial_3 v + \partial_2 u\,\partial_3 v + \partial_3 u\,\partial_2 v = \int_U e^{x_2} v \quad \forall v \in H_0^1(U)$$

genügt.

b) Die Abbildung $x \mapsto e^{x_2}$ liegt in $L^2(U)$. Des Weiteren sind alle Koeffizienten der Gleichung beschränkt und B somit stetig ist. Schließlich gilt

$$\xi^T A\xi = (2+\cos x_3)\xi_1^2 v + 2\xi_2^2 + 2\xi_3^2 + 2\xi_2\xi_3 \geq \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + (\xi_2+\xi_3)^2 \geq |\xi|^2,$$

so dass der untersuchte Operator gleichmäßig elliptisch und B für $c \geq 0$ auch koerziv ist:

$$B(u,u) \geq \int_U |\nabla u|^2 + cu^2 \geq \int_U |\nabla u|^2 = \|u\|_{H_0^1}.$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram (oder direkt nach Satz 5.11 aus der VL) existiert demnach eine eindeutige schwache Lösung u des Problems. Es gilt $u \in C^\infty(\overline{U})$, da alle a_{ij} sowie die Abbildung $x \mapsto e^{x_2}$ in $C^\infty(\overline{U})$ liegen und ∂U auch C^∞-glatt ist.

c) Nach der Poincaréschen Ungleichung gibt es eine Konstante $C_1 > 0$, so dass

$$\|u\|_{L^2(B_1(0))} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2(B_1(0))} \quad \forall u \in H_0^1(B_1(0))$$

gilt.
Sei nun $v \in H_0^1(B_\rho(0))$. Dann liegt u, definiert durch $u(x) = v(\rho x)$, in $H_0^1(B_1(0))$. Es gilt

$$\int_{B_\rho(0)} |v(x)|^2 \, dx = \int_{B_\rho(0)} |u(\rho x)|^2 \, dx = \rho^{-3} \int_{B_\rho(0)} |u(\rho x)|^2 \, d(\rho x) = \rho^{-3} \int_{B_1(0)} |u(x)|^2 \, dx$$

sowie (beachte $\nabla u(x) = \rho \nabla v(\rho x)$)

$$\begin{aligned}\int_{B_\rho(0)} |\nabla v(x)|^2 \, dx &= \int_{B_\rho(0)} \rho^{-2} |\nabla u(\rho x)|^2 \, dx \\ &= \rho^{-5} \int_{B_\rho(0)} |\nabla u(\rho x)|^2 \, d(\rho x) \; = \rho^{-5} \int_{B_1(0)} |\nabla u(x)|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von oben können wir also abschätzen:

$$\|v\|^2_{L^2(B_\rho(0))} = \rho^{-3} \|u\|_{L^2(B_1(0))} \leq C_1^2 \rho^{-3} \|\nabla u\|_{L^2(B_1(0))} = C_1^2 \rho^2 \|\nabla v\|^2_{L^2(B_\rho(0))}.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(Alternativ könnte man argumentieren, dass einerseits nach der Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung und einem Standard-Approximationsargument die Konstante C_1 in der Poincaré-Ungleichung $\|u\|_{L^6(U)} \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^2(U)}$ unabhängig von U gewählt werden kann, andererseits nach der Hölderschen Ungleichung $\|u\|_{L^2} \leq \|1\|_{L^3} \|u\|_{L^6} = (\frac{4\pi}{3})^{1/3} \rho \|u\|_{L^6}$ gilt.)

d) Es genügt zu zeigen, dass ein $\rho_c > 0$ existiert, so dass B auf $B_\rho(0)$ koerziv ist für $0 < \rho \leq \rho_c$. Die Behauptung ergibt sich dann aus dem Satz von Lax-Milgram. Nach c) (und der gleichmäßigen Elliptizitätsabschätzung aus b)) gilt nun

$$B(u,u) \geq \int_{B_\rho(0)} |\nabla u|^2 - |c| \int_{B_\rho(0)} |u|^2 \geq \int_{B_\rho(0)} |\nabla u|^2 - C_1^2 |c| \rho^2 \int_{B_\rho(0)} |\nabla u|^2.$$

Mit $\rho_c := \frac{1}{C_1 \sqrt{2|c|}}$ folgt in der Tat

$$B(u,u) \geq \frac{1}{2} \int_{B_\rho(0)} |\nabla u|^2.$$

für alle $0 < \rho \leq \rho_c$.

Aufgabe 4 (3+1+2=6 Punkte)

Es sei $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Betrachten Sie das Funktional

$$I(u) := \int_U |\nabla u|^8 + |u|^4 \, dx \quad \text{auf } \mathcal{A} = \left\{ u \in W^{1,8}(U) \mid u(x) = 1 \text{ für } |x| = 1 \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass ein eindeutiger Minimierer von I auf $\mathcal{A}$ existiert.
(Hinweis: Konvexitätseigenschaften von in diesem Problem auftretenden Funktionen dürfen ohne Begründung verwendet werden.)

b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung von I.

c) Beweisen Sie, dass $\min_{\mathcal{A}} I < \pi$ gilt, wenn $n = 2$ ist.

Lösungsvorschlag

a) Es ist $I(u) = \int_U f(u, \nabla u)$ für $f(y, z) = |z|^8 + y^4$. Da $f(z) \geq |z|^8$ gilt und f strikt konvex in (y, z) ist, gibt es nach Korollar 5.31 und Satz 5.32 aus der VL einen eindeutigen Minimierer. (Beachte, dass $g(x) \equiv 1$ in $W^{1,8}(U)$ liegt.)

b) Die Euler-Lagrange-Gleichung ist

$$-\operatorname{div}(\nabla_z f(u, \nabla u)) + \partial_y f(u, \nabla u) = 0 \text{ in } U, \quad u(x) = 1 \text{ auf } \partial U.$$

Mit $\nabla_z f(y, z) = 8|z|^6 z$ und $\partial_y f(y, z) = 4y^3$ ergibt sich

$$-2 \operatorname{div}(|\nabla u|^6 \nabla u) + u^3 = 0 \text{ in } U, \quad u(x) = 1 \text{ auf } \partial U.$$

c) Für $\bar{u}(x) \equiv 1$ ist

$$I(\bar{u}) = \int_U |\nabla \bar{u}|^8 + |\bar{u}|^4 \, dx = \int_U 0 + |1|^4 \, dx = \pi$$

und damit $\min_{\mathcal{A}} I \leq I(\bar{u}) \leq \pi$, denn offensichtlich ist $\bar{u} \in \mathcal{A}$. Wäre jedoch $\min_{\mathcal{A}} I = \pi$, so wäre $\bar{u}$ ein Minimierer. Da f den Wachstumsbedingungen

$$|f(y, z)| \leq 1 + |y|^8 + |z|^8, \quad |\nabla_z f(y, z)| + |\partial_y f(y, z)| \leq 8(1 + |y|^7 + |z|^7)$$

genügt, müsste dann $\bar{u}$ aber die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllen. Mit b) folgt der Widerspruch

$$-2 \operatorname{div}(|\nabla \bar{u}|^6 \nabla \bar{u}) + \bar{u}^3 = 1 \neq 0 \text{ in } U$$

(bzw. $\int 2|\nabla \bar{u}|^6 \nabla \bar{u} \cdot \nabla v + \bar{u}^3 v = \int v \neq 0$ für geeignete $v \in C_c^\infty(U)$ in der schwachen Formulierung).

(Alternativ könnte man zeigen, dass $\tilde{u} \in \mathcal{A}$, $\tilde{u}(x) = 1 - \varepsilon + \varepsilon |x|^2$, der Abschätzung $I(\tilde{u}) = \pi\,(1 - 2\varepsilon)) + O(\varepsilon^2) < \pi$ für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein genügt.)

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Kreuzen Sie im Folgenden die jeweils **richtige Aussage** an.
Jede korrekte Antwort wird mit *1 Punkt*, jede falsche Anwort mit *-1 Punkt* und jede unbeantwortete Frage mit *0 Punkten* bewertet.
Die minimale Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe beträgt *0 Punkte*.

Lösung:

Die PDG $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$ auf $\mathbb{R}^2$ ist elliptisch.	■ Ja ☐ Nein
Jede beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^3$ ist konstant.	■ Ja ☐ Nein
Jede beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ ist konstant.	☐ Ja ■ Nein
Für $U \subset \mathbb{R}^{2010}$ offen, beschränkt mit C^1-Rand ist die Menge $\left\{ f \in C_c^\infty(U) \mid \int_U \lvert \nabla f(x) \rvert^{2009} \leq 7 \right\}$ relativkompakt in $L^{4.000.000}(U)$.	■ Ja ☐ Nein
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \cos x$ für $x \leq 0$, $f(x) = \sin x$ für $x > 0$ ist schwach differenzierbar.	☐ Ja ■ Nein
Jede schwach differenzierbare Funktion ist stetig.	☐ Ja ■ Nein
Für C^∞-glatte Anfangswerte besitzt die Burgers-Gleichung $u_t + u\, u_x = 0$ eine glatte Lösung auf ganz $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.	☐ Ja ■ Nein
$B(u,v) := \int_{(0,1)^2} u_{x_1} v_{x_1}\, dx$ definiert eine koerzive Bilinearform auf $H_0^1((0,1)^2)$.	☐ Ja ■ Nein
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen mit C^1-Rand, $1 \leq p < n$. Es gibt eine von U unabhängige Konstante $C > 0$, so dass $\lVert u \rVert_{L^q} \leq C \lVert \nabla u \rVert_{L^p} \quad \forall\, u \in W_0^{1,p}(U)$, wenn $q = p^*$ ist bzw.	■ Ja ☐ Nein
wenn $q = 1$ ist.	☐ Ja ■ Nein

Begründungen

a) Die zugehörige charakteristische Varietät ist

$$\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \xi_1^4 + 2\xi_1^2\xi_2^2 + \xi_2^4 = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^2 = 0\} = \emptyset.$$

b) Nach dem Satz von Liouville.

c) Gegenbeispiel: Die Fundamentallösung des Laplace-Operators.

d) Nach der Poincaréschen Ungleichung ist die fragliche Menge in $W^{1,2009}(U)$ beschränkt und nach dem Staz von Rellich-Kondrachov also in $L^q(U)$ relativkompakt für alle $1 \leq q < 2009^*$, wobei $2009^* = \frac{2010 \cdot 2009}{2010-2009} = 2010 \cdot 2009 > 4.000.000$ ist.

e) Ähnlich wie man zeigt, dass $g(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $g(x) = 1$ für $x > 0$ nicht schwach differenzierbar ist (s. Skript).

f) Ein Beispiel aus der VL (im Skript unter Bemerkung 4.4) zeigt, dass

$$|x|^{-\gamma} \in W^{1,1}(B_1(0)), \quad \gamma > 0$$

gilt, wenn die Raumdimension hoch genug ist.

g) Sich schneidende Charakteristiken, entlang deren die Lösung konstant sein muss, führen i.A. zu Schocks.

h) Betrachte $u_k(x) = \cos(\pi x_1)\cos(k\pi x_2)$. Es gilt

$$\nabla u_k = -\pi(\sin(\pi x_1)\cos(k\pi x_2), k\cos(\pi x_1)\sin(k\pi x_2))$$

und daher

$$B(u_k, u_k) = \pi^2 \int_{(0,1)^2} \sin^2(\pi x_1)\cos^2(k\pi x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{\pi}{4}$$

aber

$$\|u_k\|^2_{H^1_0((0,1)^2)} = \pi^2 \int_{(0,1)^2} \sin^2(\pi x_1)\cos^2(k\pi x_2) + k^2\cos^2(\pi x_1)\sin^2(k\pi x_2)\, dx_1 dx_2 = \frac{\pi(1+k^2)}{4}.$$

Insbesondere gibt es keine Konstante $c > 0$ mit $B(u_k, u_k) \geq c\|u_k\|_{H^1_0}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

i) Das folgt aus der Ungleichung von Gagliardo-Nirenberg-Sobolev und einem Standard-Approximationsargument.

j) Anderenfalls wäre $\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für alle $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ein Skalierungsargument (s. die Einleitung zur Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung in der VL) zeigt, dass das nicht sein kann.