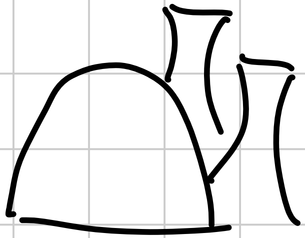
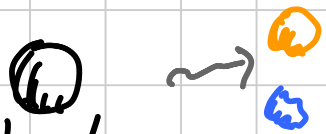
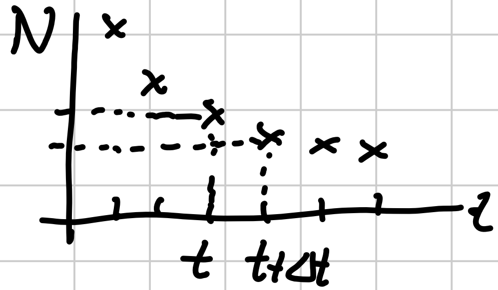
# § 8 Wo treten die grundlegenden Beispiele für gewöhnl. Differentialgleichungen in Physik, Chemie, Biologie auf?

## a) Radioaktiver Zerfall (Physik)





Atomkern




$N(t)$ = Anzahl radioaktiver Atome zur Zeit $t$

$$\frac{N(t)-N(t+\Delta t)}{\Delta t} \approx -\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t} \approx -N'(t)$$ Anzahl Kerne, die pro Zeiteinheit zerfallen

Physikal. Gesetz:

| | | |
|---|---|---|
| Anzahl Kerne, die pro Zeiteinheit zerfallen | ist proportional zur | Anzahl radioaktiver Kerne |

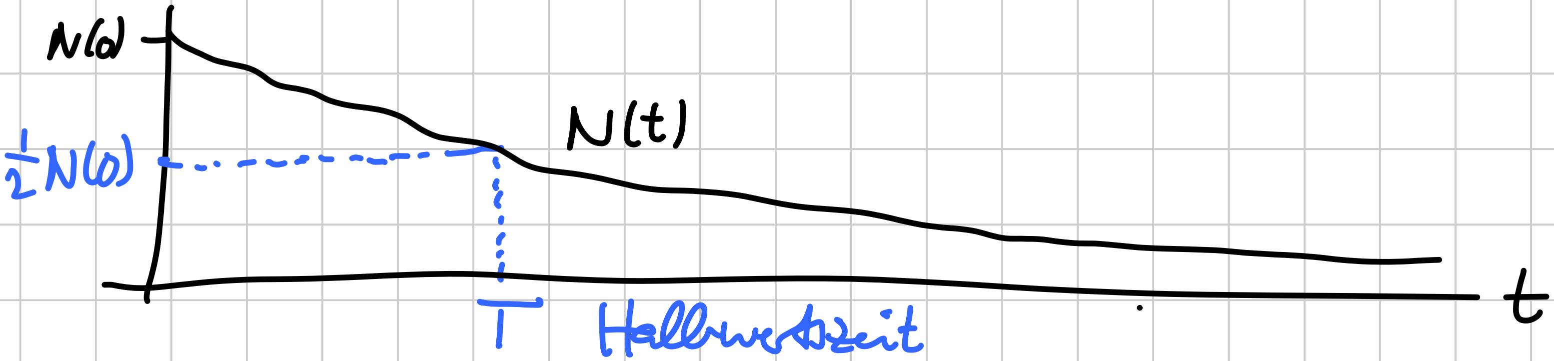
$$\underbrace{-N'(t) = \underbrace{a}_{\text{Proportionalitätskonstante}} \cdot N(t)}_{\text{Differentialgleichung}}$$

(hier: Zerfallsrate)

Physikal. Interpretation der Lösung u. der Proportionalitätskonstante:

nach §7 $\left( y' = -a\, y(t) \right)$ : $N(t) = N(0)\, e^{-at}$

$N' = -a\, N(t)$




Nach einer bestimmten Zeit halbiert sich die Lösung. Diese Zeit heißt <u>Halbwertszeit</u>.

<u>Bestimmen der Halbwertszeit:</u>

$$\frac{1}{2} \cancel{N(0)} \overset{!}{=} N(T) = \cancel{N(0)}\, e^{-aT} \qquad \Big|\cdot 2,\ \cdot e^{aT}$$

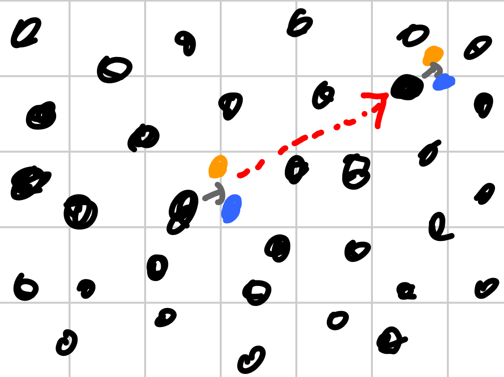
$$\Rightarrow \quad e^{aT} = 2 \qquad \Big|\log$$

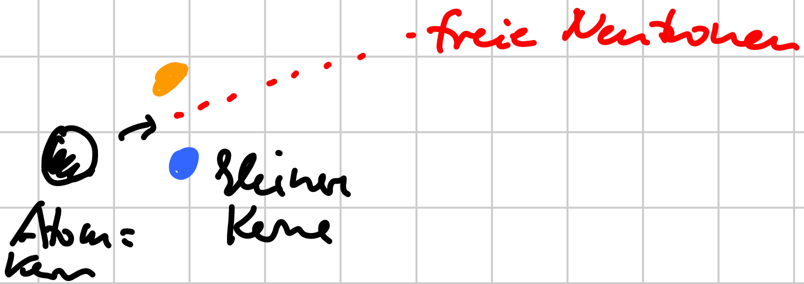
$$\Rightarrow \quad aT = \log 2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{\log 2}{a} \qquad \left(\text{bzw: } a = \frac{\log 2}{T}\right)$$

| Fukushima 2012 | Jod 131 | Cs 137 |
|---|---|---|
| T | 8 Tage | 30 Jahre |

## b) Nukleare Kettenreaktion






2 Prozesse

- Spontaner Zerfall von Kernen, siehe a)
- Zerfall setzt Neutronen frei, die weiteren Kern spalten

Physikal. Gesetz: $N(t)$ = Anzahl radioaktiver Kerne zur Zeit $t$

$$\frac{dN}{dt} = -a\,N(t) + \underbrace{k'}_{\text{Wahrscheinlichkeit, daß freiwerdenden Neutron}} \cdot N(t)$$

weitere Kerne spaltet

$k' = b \cdot N(t)$ (proportional zu Anzahl Kerne)

Insgesamt:

$$\underbrace{\frac{dN}{dt} = -aN(t)}_{\text{will exponentiellen Abfall (Bsp 1, §7)}} + \underbrace{b\,N(t)^2}_{\text{will "blow-up" (Bsp 3, §7)}}$$

Welcher Effekt "gewinnt"?

## Bestimmen der Lösung

(zur Vereinfachung $a = b = 1$)

① Trennung der Variablen

$$\frac{dN}{dt} = -N + N^2 \qquad \Big|\cdot dt\,,\ \cdot \frac{1}{N^2 - N}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N^2 - N} = dt$$

② Stammfunktion:

$$\frac{1}{N^2-N} = \frac{1}{(N-1)\cdot N} = \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N}$$

"Partialbruchzerlegung"

$$\int \frac{dN}{N^2-N} = \int dt$$

$$\log(N-1) - \log(N) = t + C$$

$$= \log\left(\frac{N-1}{N}\right)$$

③ Nach $N$ auflösen: $e^{(\dots)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{N-1}{N} = e^{t+C} \quad (*) \quad \Big| \; + \frac{1}{N} - e^{t+C}$$

$$\frac{N-1}{N} = \frac{N}{N} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^{t+C} = \frac{1}{N} \quad \Big| \; \frac{1}{(\dots)}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{1}{1 - e^C \cdot e^t}$$

④ $C$ bzw. $e^C$ aus Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ $\quad \Big| \; t=0$ in $(*)$

$$1 - \frac{1}{N_0} = e^C \quad \Big| \text{ einsetzen in ③}$$

$$\boxed{N = \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{N_0}\right)e^t}}$$

Verhalten hängt entscheidend von Anfangsbeding. $N_0$ ab!

Lösung für $a>0$, $b>0$: $\qquad m := \frac{a}{b}$

$$\boxed{N = \frac{m}{1-\left(1-\frac{m}{N_0}\right)\cdot e^{at}}}$$

Fall 1 $\quad 1-\frac{m}{N_0} =: -d < 0 \iff -\left(1-\frac{m}{N_0}\right) = d > 0$

$\Updownarrow$

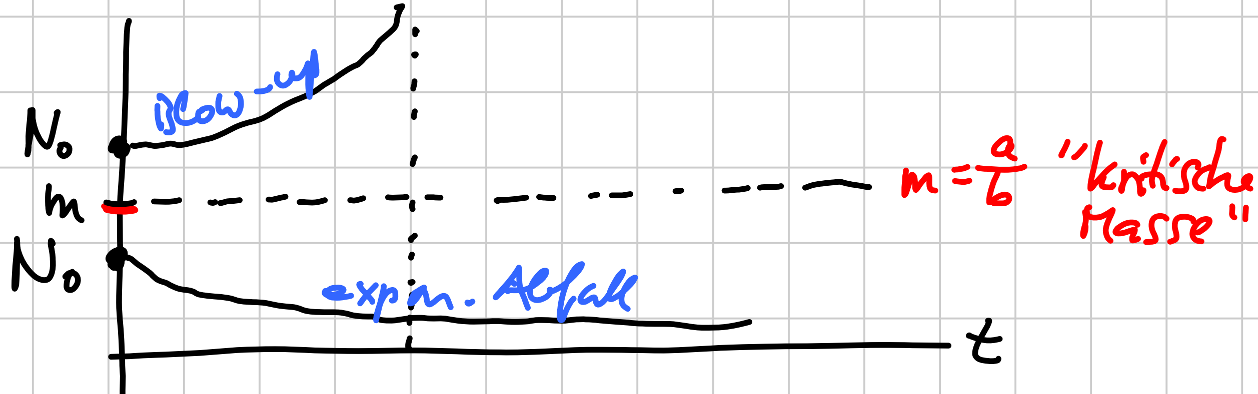
$1 < \frac{m}{N_0}$

$\Updownarrow$

$\boxed{N_0 < m}$

$$N = \frac{m}{1+d\cdot e^{at}}, \quad d>0$$

Fall 2 $\boxed{N_0 = m}$



$N = m$ (konstant)

Fall 3 $\boxed{N_0 > m}$

$$1 - \frac{m}{N_0} = d' > 0 \qquad N = \frac{1}{1 - d' e^{at}}, \quad d' > 0$$

Der kritische Startwert $N_0 = \frac{a}{b}$, oberhalb dessen Blow-up stattfindet, heißt kritische Masse.

Uran 235 krit. Masse 49 kg

Hiroshima 64 kg $\to$ 38.4, $\to$ 25.6

Bemerkung: Deutschland hat den Atomwaffen=sperrvertrag unterschrieben (1969)