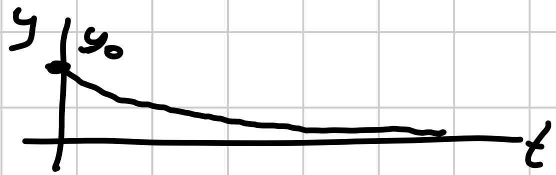
[noch: §7 ... Diff'gleichungen 1. Ordn. ...]

Beispiele

1) $y' = -ay, \quad a>0$ $\qquad y(0)=y_0$

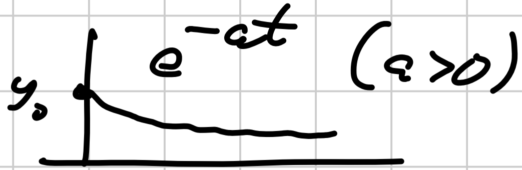


2) $y' = ay, \quad a>0$

3) $y' = by^2, \quad b>0$

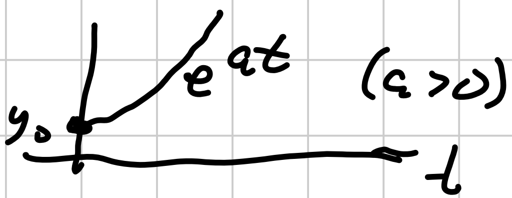
4) $y' = -by^2, \quad b>0$

5) $y' = -ay+b, \quad a,b>0$



1) $y(t) = y_0 e^{-at}$ letzte Stunde

2) $y(t) = y_0 e^{at}$ analog (−a durch a ersetzen)



3) Vorüberlegung: Sei $y_0 > 1$. Rechte Seite $\underset{\substack{\text{wenn } y' = by^2}}{\underset{y'(0)}{\underset{\shortparallel}{b y_0^2}}} > \underset{\substack{\text{wenn } y' = b\cdot y}}{\underset{y'(0)}{\underset{\shortparallel}{b y_0}}}$

Also sollte y schneller wachsen als bei der Gl. $y' = b\cdot y$

Also erwarten wir $y(t) > \underbrace{y_0 e^{b\cdot t}}_{\text{Lsg. von } y' = b\cdot y}$

(superexponentielles Wachstum)

4-Schritt-Methode:

① Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = b y^2 \qquad \Big| \cdot dt$$

$$\Rightarrow dy = b y^2 \, dt \qquad \Big| \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} dy = b \, dt$$

② Stammfunktion

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int b\,dt$$

$$\parallel$$

$$\int y^{-2}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = bt + C \qquad (*)$$

$$\int y^n\,dy = \frac{1}{n+1}\,y^{n+1} + C$$

mit $n = -2$

3 Nach y auflösen 2 $\cdot (-1)$

$$\frac{1}{y} = -C - bt \qquad \Big|\ \frac{1}{(\ldots)}$$

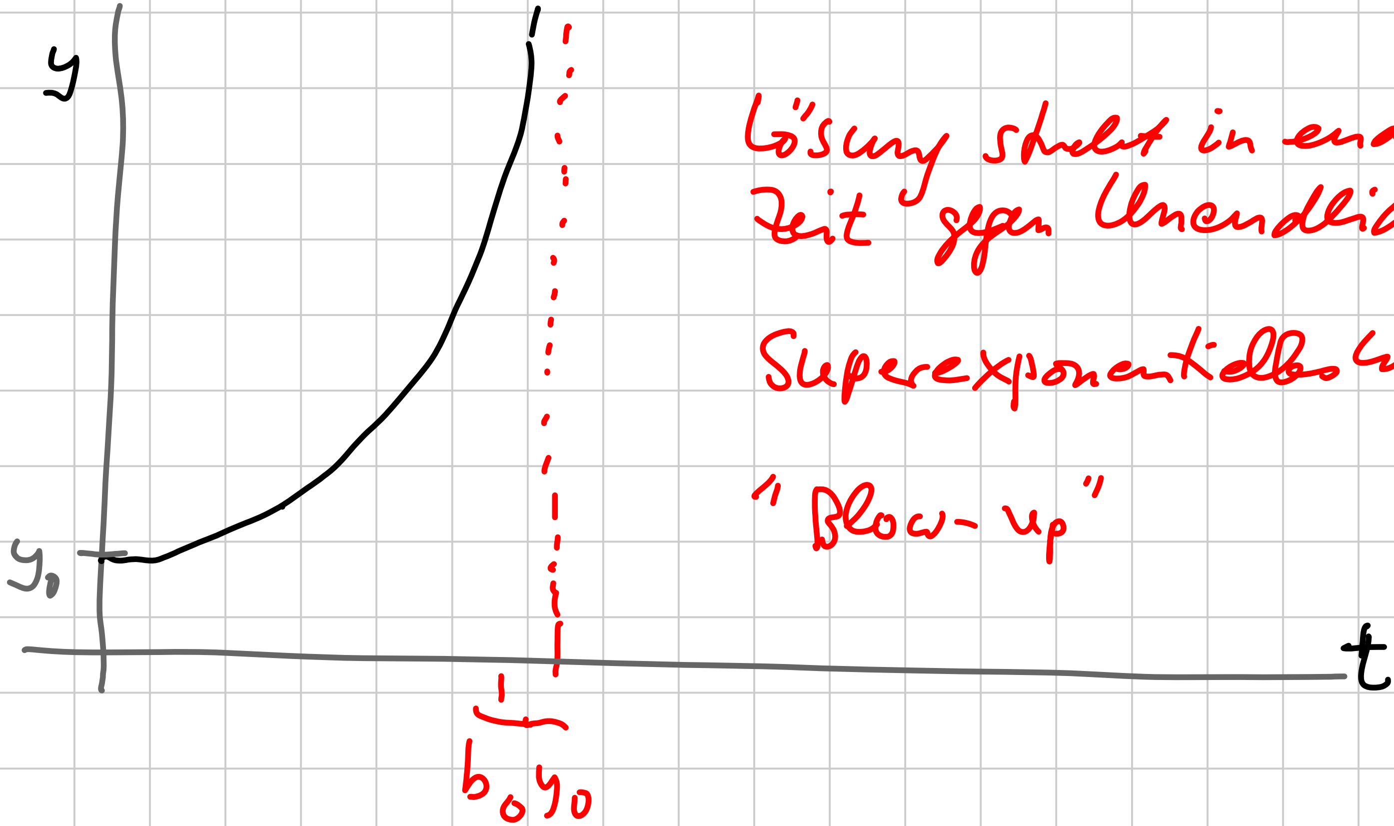
$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{-C - bt}$$

4 C aus Anfangsbedingung $\quad \big|\ t = 0$ in $(*)$

$$-\frac{1}{y_0} = \cancel{b \cdot 0} + C \qquad \big|\ \text{Einsetzen in } 3$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - bt}$$

$$\text{Nenner} = 0 \iff \frac{1}{y_0} = bt \iff t = \frac{1}{b y_0}$$



Lösung strebt in endlicher Zeit gegen Unendlich

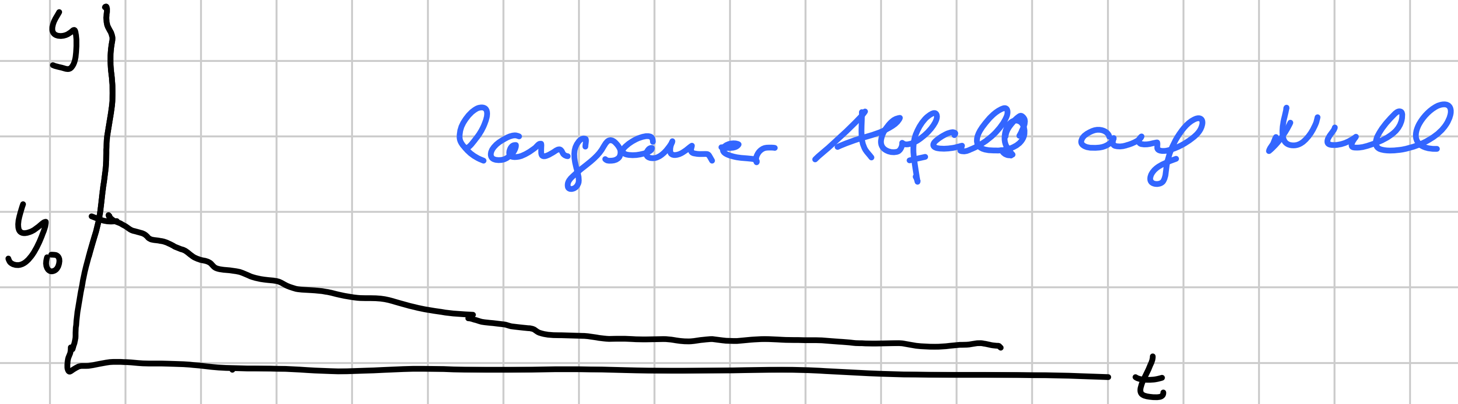
Superexponentielles Wachstum

„Blow-up"

4) $y' = -by^2$: b durch $-b$ ersetzen

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + bt}$$

Nenner $\neq 0$ für alle $t > 0$



Interpretation: Für $y<1$ ist $y^2 < y$

$\Rightarrow$ $-by^2$ hat kleineren Absolutbetrag als $-by$

(z.B. $b=1, y=\frac{1}{10}$:
$-by^2 = -\frac{1}{100}$, $\quad -by = -\frac{1}{10}$)

$\Rightarrow$ y' hat kleineren Betrag als Lsg. von $y' = -by$

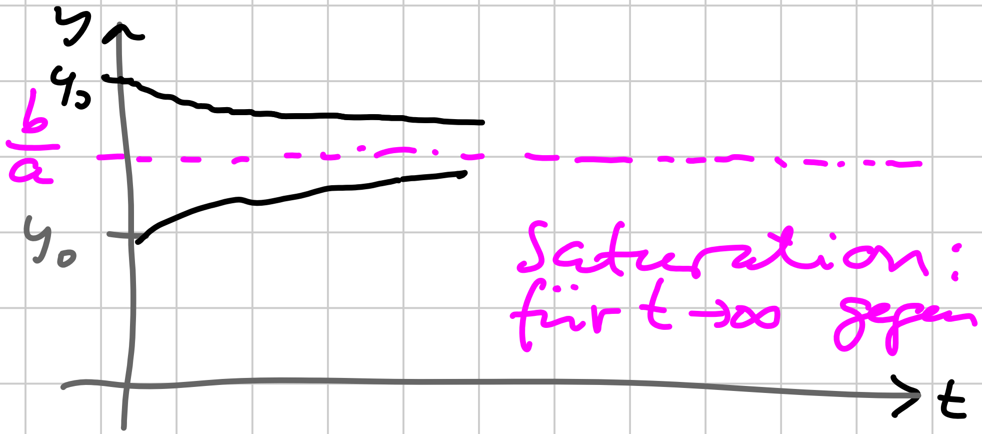
$\Rightarrow$ y fällt langsamer als $y_0 e^{-bt}$

5) $y' = -ay + b, \quad a,b>0, \quad y(0)=y_0>0$

will, dass Lösung fällt

will, dass Lösung steigt

WETTBEWERB!
WER "GEWINNT"?



Saturation: Lösung strebt für $t \to \infty$ gegen b/a

Beide Terme gleich stark / heben sich weg wenn $-ay+b=0$

$$\Longleftrightarrow \quad b = ay$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{b}{a} = y$$

① Separation

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b \quad \Big| \cdot dt$$

$$dy = (-ay + b)\,dt \quad \Big| \cdot \frac{1}{-ay+b}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{-ay+b} = dt \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{ay-b} = -dt$$

② Stammfunktion

$$\int \frac{1}{ay-b}\,dy = -\int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\log(ay-b) = -t + C$$

[Nachprüfen: $\log(ay-b)' = \underbrace{\frac{1}{ay-b}}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{a}_{\text{innere Abl.}}$ ✓]

③ Nach y auflösen $\quad \Big| \cdot a$

$$\Rightarrow \quad \log(ay-b) = -at + aC \quad \Big| \; e^{(\dots)}$$

$$\Rightarrow \quad ay-b = e^{-at} \cdot e^{aC} \quad \Big| +b, \; \cdot \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \quad ay = e^{-at} \cdot e^{aC} + b$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{a} e^{-at} \cdot e^{aC} + \frac{b}{a}$$

(4) C aus Anfangsbed. $\quad \Big| \; t=0$ in (2)

$$\frac{1}{a} \log(ay-b) = -t + C \quad \Big| \; t=0$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{a}} \log(ay_0-b) = aC \quad \Big| \; e^{(\dots)}$$

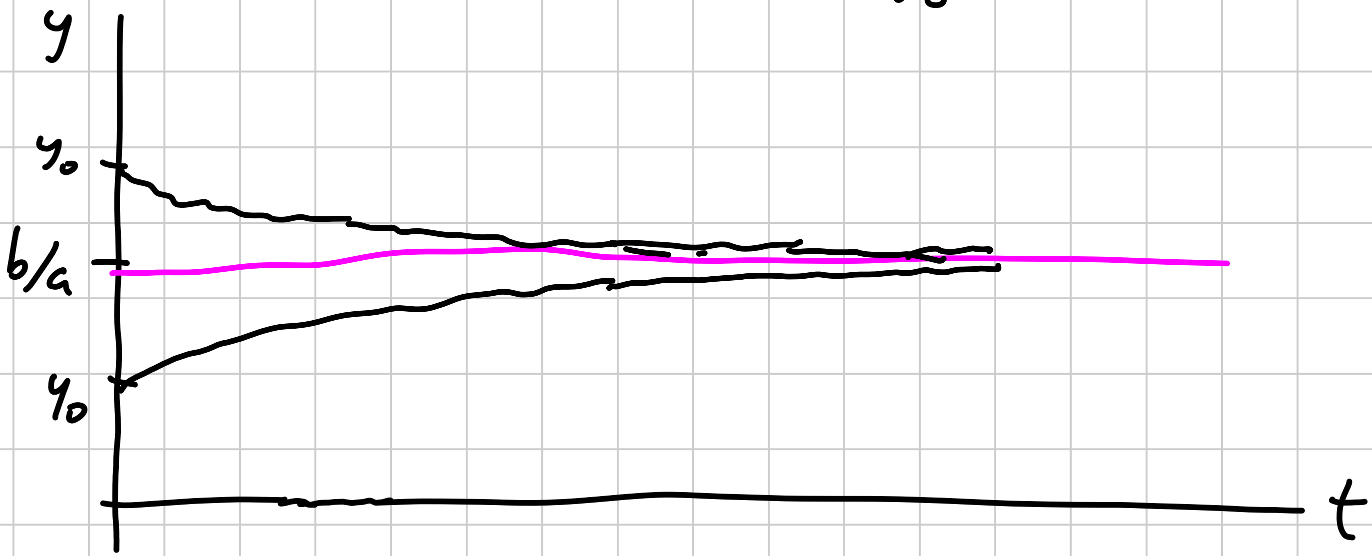
$$\Rightarrow \quad ay_0-b = e^{aC} \quad \Big| \text{ in } (3)$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{ay_0-b}{a} \cdot e^{-at} + \frac{b}{a}$$

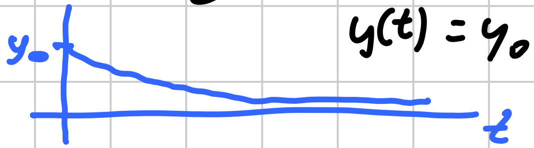
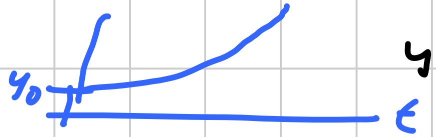
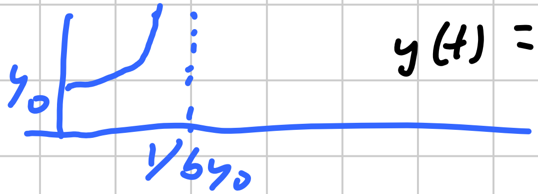
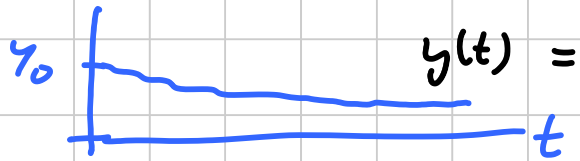
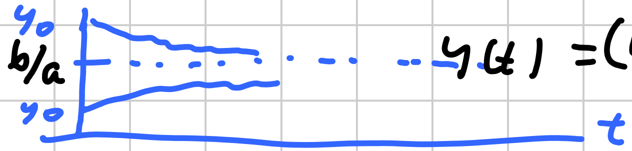
$$= \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) \cdot e^{-at} + \frac{b}{a}$$

> 0 wenn $y_0 > \frac{b}{a}$ strebt exponentiell gegen 0 Schwellenwert, für den $y' = 0$

$<$ $<$



Übersicht: Verhalten v. Lösungen

Differentialgl.	Lösung	Verhalten
$y' = -ay,\ a>0$	 $y(t) = y_0 e^{-at}$	Exponentieller Abfall
$y' = ay$, —"—	 $y(t) = y_0 e^{at}$	Exponentielles Wachstum
$y' = by^2,\ b>0$	 $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - bt}$	"Blow-up" Lösung strebt in endlicher Zeit gegen unendlich
$y' = -by^2$, —"—	 $y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + bt}$	langsamer Abfall
$y' = -ay + b,\ a,b>0$	 $y(t) = (y_0 - b/a)e^{-at} + \frac{b}{a}$	Saturation

Vorsdau: Di:

$$y' = -ay$$ Radioaktiver Zerfall

$$y' = -ay + by^2$$ Kettenreaktion