Physikal. / chem. / biol. System $\xrightarrow{\text{Modellierung}}$ math. Modell

z.B. Flugzeug

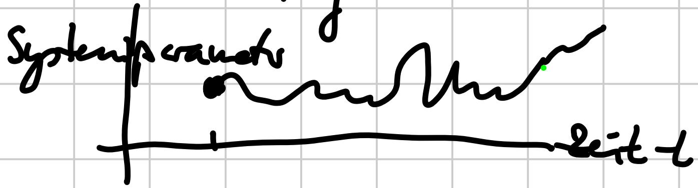
wichtiger Fall: Differential=gleichung

Flugsimulator

Experiment/Messung

Rechnung*)/Computersimulation

Lösung

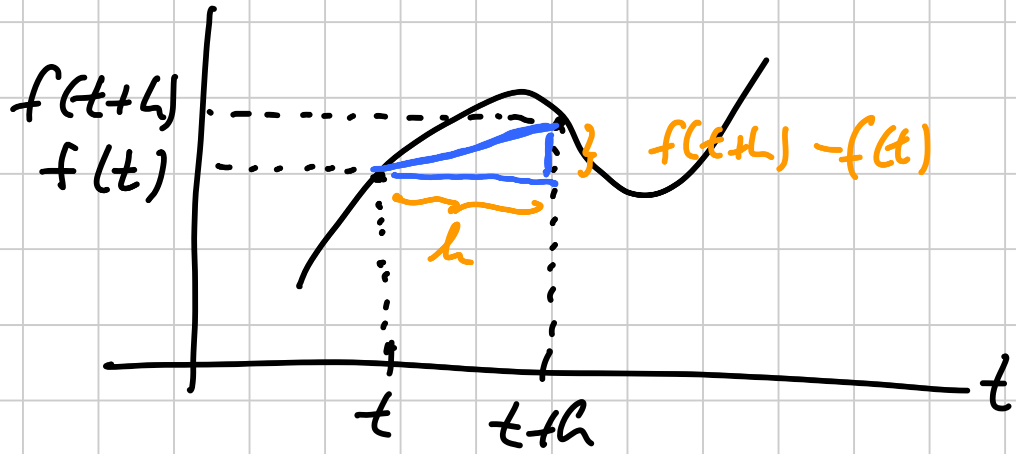


Verhalten des Systems (z.B. als Fkt. der Zeit) $\xleftarrow{\text{Vorhersage}}$

*) Hilfsmittel:
- Ableitung
- Stammfunktion

§6 Ableitung und Stammfunktion

6.1 Ableitung



- Ableitung einer Fkt. $f(t)$ = Steigung am Punkt t
  (wenn t = Zeit: Geschwindigkeit zur Zeit t)

- $$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

- Alternative Schreibweisen: $f'(t) = \dot{f}(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{d}{dt} f(t)$

$f(t)$	$f'(t)$	
C (Konstante)	0	
$at+b$	a	
t^n	$n t^{n-1}$	
$A \cdot g(t) + B \cdot h(t)$ (insbes.: $g(t) + h(t)$)	$A \cdot g'(t) + B \cdot h'(t)$ $(g'(t) + h'(t))$	Linearität
$g(t) \cdot h(t)$	$g'(t) \cdot h(t) + g(t) \cdot h'(t)$	Produktregel
$g(h(t))$	$\underbrace{g'(h(t))}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{h'(t)}_{\text{innere Abl.}}$	Kettenregel
$\frac{g(t)}{h(t)}$	$\frac{g'(t)h(t) - g(t)h'(t)}{(h(t))^2}$	Quotientenregel
$\sin t$	$\cos t$	
$\cos t$	$-\sin t$	
e^t	e^t	

$f(t)$	$f'(t)$
$\log t = \log_e t = \ln t$ (siehe VL2 §2)*)	$\frac{1}{t}$
a^t	$\log_e a \cdot a^t = \log a \cdot a^t$
$\log_B t$	$\frac{1}{\log_e B} \cdot \frac{1}{t} = \frac{1}{\log B} \cdot \frac{1}{t}$

*) $e = 2{,}71828\ldots$
$$= \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

<u>Bsp</u> $f(t) = (4t+3)^6$

$$f(t) = g(h(t)) \qquad h(t) = 4t+3 \qquad g(z) = z^6$$
$$h'(t) = 4 \qquad g'(z) = 6z^5$$

$$f'(t) = g'(h(t)) \cdot h'(t)$$
$$= \underbrace{6 \cdot (4t+3)^5}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{4}_{\text{innere Abl.}}$$

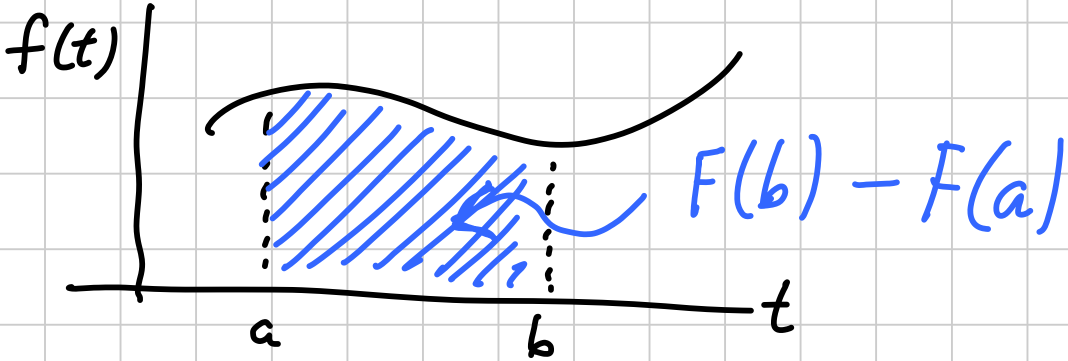
6.2 Stammfunktion

- Eine Stammfunktion einer gegebenen Funktion $f(t)$ ist eine Funktion $F(t)$ sodaß $F'(t) = f(t)$.

- Schreibweise: $F(t) = \int f(t)\, dt$

  Integralzeichen

- Geometrische Bedeutung: Flächeninhalt



- F eindeutig bis auf additive Konstante (kleiner "Info-Verlust" durch Ableiten)

$$\boxed{\text{Ableiten ist Technik, Stammfunktionen finden ist Kunst}}$$

$$g(h(t)) \xrightarrow[\text{Ableiten}]{} g'(h(t)) \cdot h'(t)$$

$$\xleftarrow[\text{Stammfkt. finden}]{}$$

Kein Analogon der Kettenregel (Stammfkt. von $g(h(t))$ unbekannt selbst wenn Stammfkt'en von g & h bekannt)

$f(t)$	Stammfunktion $F(t)$
a	$at + C$
$at^n,\ n \neq -1$	$\frac{a}{n+1} t^{n+1} + C$
$a \cdot t^{-1} = \frac{a}{t}$	$a \log t + C$
$(at+b)^n,\ n \neq -1$	$\frac{1}{a} \frac{1}{n+1} (at+b)^{n+1} + C$
$\frac{1}{at+b}$	$\frac{1}{a} \log (at+b) + C$
$\frac{1}{(t-a)(t-b)},\ a \neq b$	$\frac{1}{a-b} \log \frac{t-a}{t-b} + C = \frac{1}{a-b} \left(\log(t-a) - \log(t-b)\right) + C$
e^{at}	$\frac{1}{a} e^{at} + C$
$\sin(at)$	$-\frac{1}{a} \cos(at) + C$
$\cos(at)$	$\frac{1}{a} \sin(at) + C$
$Ag(t) + Bh(t)$	$AF(t) + BH(t) + C$ (Linearität)

Beweis der Stammfkt.-tabelle: Rechte Spalte ableiten, Ableitungstabelle $\Rightarrow$ $F'(t) = f(t)$.

Regel $at^n \rightsquigarrow \frac{a}{n+1} t^{n+1}$

- Exponent um 1 erhöhen
- $\frac{1}{\text{neuer Exponent}}$ davormultiplizieren

Bsp $f(t) = 7t^3 - 2t^2 + 5t - 1$

$$F(t) = \frac{7}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{5}{2}t^2 - t \quad (+\, C)$$

Herleitung der Stammfkt. von $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$

Hauptnenner

$$\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

Partialbruchzerlegung:
Zerlege $\frac{1}{\text{Produkt}}$ in Differenz zweier Kehrwerte

Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{(t-a)(t-b)}$ $(b \neq a)$:

Ansatz $\frac{1}{(t-a)(t-b)} = \frac{A}{t-a} - \frac{B}{t-b}$ (A, B Konstanten)

Bestimmen von A und B:

Rechte Seite $= \frac{A\cdot(t-b)}{(t-a)\cdot(t-b)} - \frac{B\cdot(t-a)}{(t-a)\cdot(t-b)}$

auf Hauptnenner bringen

$$= \frac{A \cdot t - Ab - B \cdot t + B \cdot a}{(t-a)\cdot(t-b)} \overset{!}{=} \frac{1}{(t-a)(t-b)}$$

$$\Rightarrow \underset{(1)}{A = B}, \quad \underset{(2)}{-A \cdot b + B \cdot a = 1}$$

$$(1) \text{ in } (2) \Rightarrow \underbrace{-A \cdot b + A \cdot a}_{A(a-b)} = 1$$

$$\underset{\cdot \frac{1}{a-b}}{\Rightarrow} \quad A = \frac{1}{a-b}$$

Also $$\underbrace{\frac{1}{(t-a)(t-b)}}_{f(t)} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{t-a} - \frac{1}{t-b}\right)$$

Also $$F(t) = \frac{1}{a-b}\left(\log(t-a) - \log(t-b)\right)$$
$$\underset{\text{Log. gesetz}}{=} \frac{1}{a-b} \log\left(\frac{t-a}{t-b}\right)$$

Methode funktioniert allgemeiner, z.B. $\frac{1}{t(t-1)(t-2)}$

siehe Blatt 4

§7 Methode zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung

Def. Eine Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine unbekannte Funktion $y(t)$, in der Ableitungen von y vorkommen.

Die Ordnung der Diff.gl. entspricht der höchsten Ableitung, die auftritt:

1. Abl. $\to$ Ordnung 1

2. Abl. $\to$ 2
(Abl. der Abl.)

Bsp.: $\begin{cases} y' = -ay, \ a > 0 \\ y'(t) = f(t), \ f \text{ gegeben} \end{cases}$

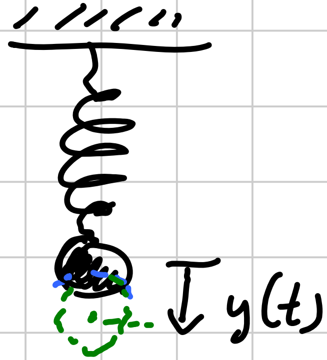
$y'' = -ay, \ a > 0$

Bei Differentialgleichungen n-ter Ordnung ist die Lösung typischerweise eindeutig, wenn n Anfangsbedingungen vorgegeben werden.

Bsp Ordng. 1 $\quad y' = -ay, \; y(0) = y_0, \quad y_0$ gegeben

$y' = f(t), \; y(0) = y_0, \quad$ — " —

Ordng. 2 $\quad y'' = -ay, \; \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases} \quad y_0, v_0$ gegeben



Physikal. Bedeutung:

y_0 Anfangsposition

v_0 Anfangsgeschwindigkeit

$y(t)$ Auslenkung aus der Ruhelage eines Federpendels zur Zeit t

Beispiel 1) $\begin{cases} y' = -ay, & a>0 \\ y(0) = y_0, & y_0 \text{ gegeben} \end{cases}$

4-Schritt-Methode zur Lösung der Diff.gleichung

① Trennung der Variablen:
(y' als $\frac{dy}{dt}$ schreiben, y und dy auf eine Seite, dt auf andere Seite)

$$\frac{dy}{dt} = -ay \qquad \Big| \cdot dt$$

$$dy = -ay\,dt \qquad \Big| \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{y} = -a\,dt$$

② Stammfunktion beider Seiten (① "integrieren", Stammfkt. aus Tabelle)

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int -a\,dt$$

Stammfkt. von $\frac{1}{y}$ bzgl. y = Stammfkt. von $-a$ bzgl. t

$$\log y = -at + C$$

③ Nach y auflösen

$$② \quad \Big| \; e^{(\ldots)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\log y}}_{=\, y} = \underbrace{e^{-at+C}}_{=\, e^{-at}\cdot e^{C}}$$

|| Potenzgesetz

④ C (oder e^C) aus Anfangsbedingung bestimmen

($t=0$ setzen, Gleichung nach C (oder e^C) auflösen)

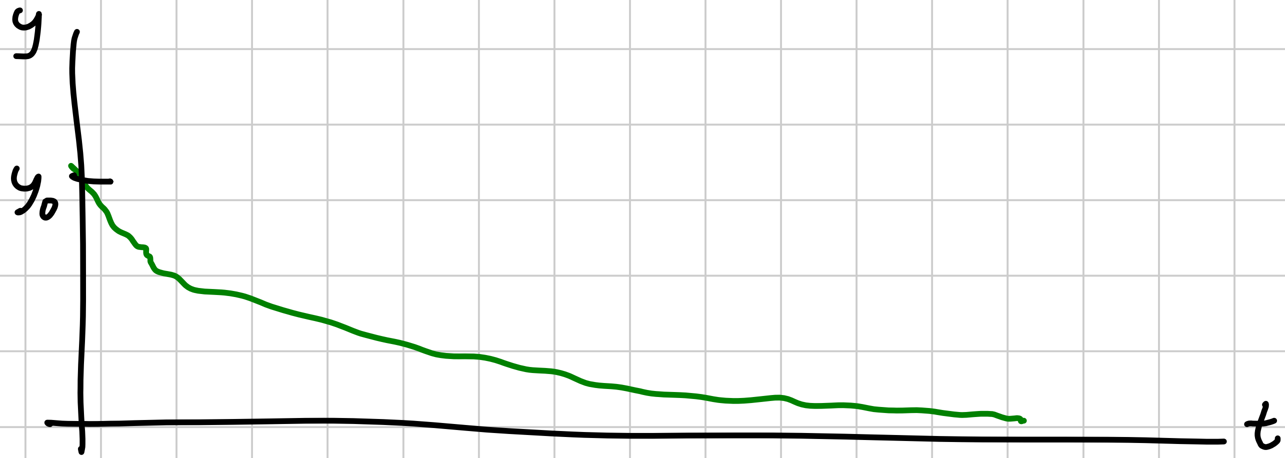
$$y(t) = e^{-at}\cdot e^{C} \quad \Big| \; t=0$$

$$y(0) = 1 \cdot e^{C}$$

Anfangsbed. $\shortparallel$ y_0

$$\Rightarrow \quad e^{C} = y_0 \qquad \Big| \text{ Einsetzen in } ③$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = y_0 \cdot e^{-at}}$$



Die Lösung ist eine Exponentialfunktion.