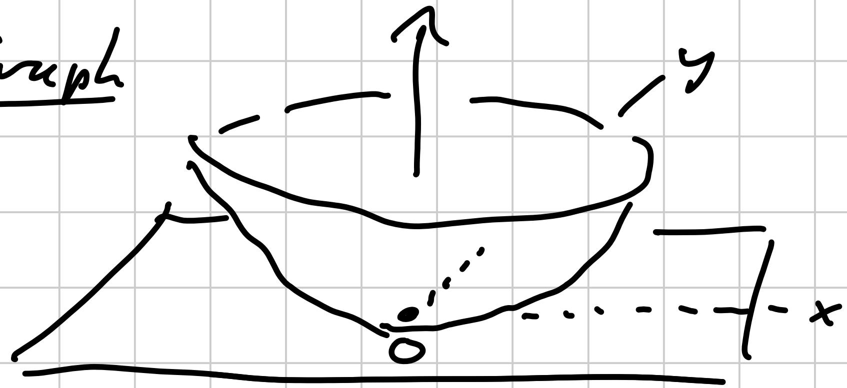
Bsp 2) $f(x,y) = x^2+y^2$

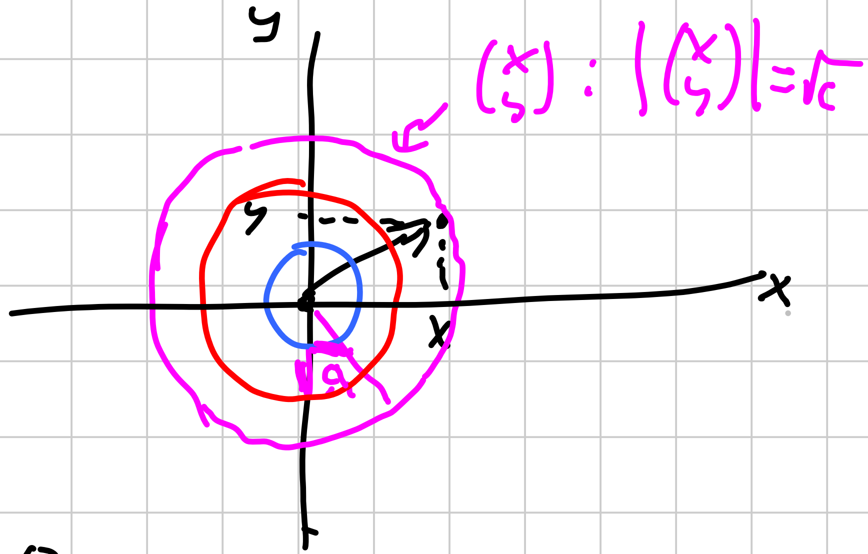
a) Graph



b) Höhenlinien

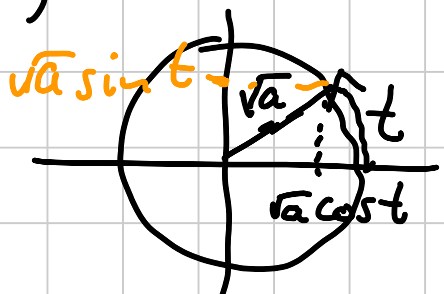
$$x^2+y^2 = a$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{= \left|\binom{x}{y}\right|} = \sqrt{a}$$



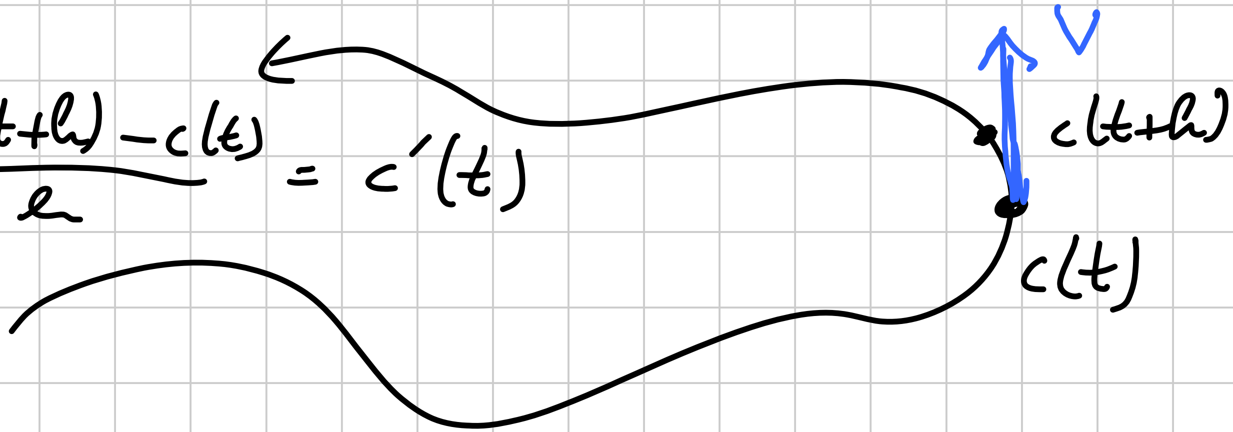
Höhenlinie mit Funktionswert a
= Kreislinie mit Radius $\sqrt{a}$ um 0

Parametrisierung: $\binom{x}{y} = c(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{a}\cos t \\ \sqrt{a}\sin t \end{pmatrix}, \; 0 \le t \le 2\pi$



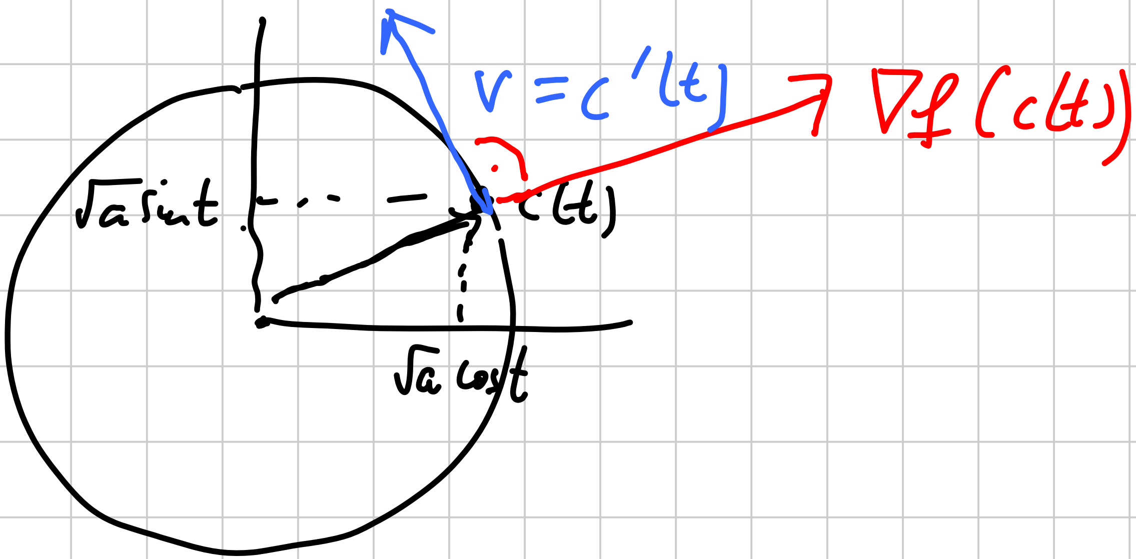
Tangentialvektor einer Linie:

$$v = \lim_{h \to 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = c'(t)$$



Hier: $$c(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} \cos t \\ \sqrt{a} \sin t \end{pmatrix}$$

$$c'(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{a} \sin t \\ \sqrt{a} \cos t \end{pmatrix}$$



$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(c(t)) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{a}\cos t \\ 2\sqrt{a}\sin t \end{pmatrix}$$

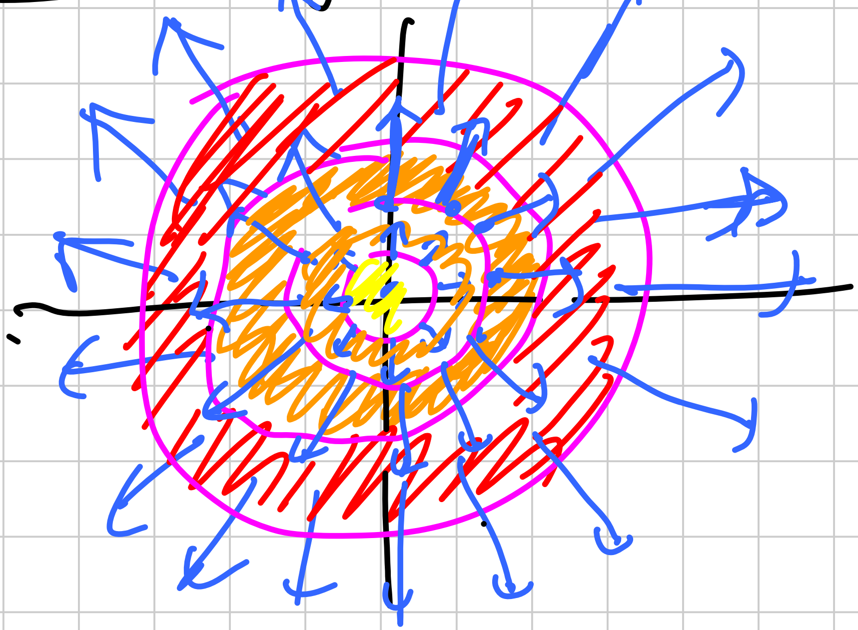
$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{a}\cos t \\ 2\sqrt{a}\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{a}\sin t \\ \sqrt{a}\cos t \end{pmatrix}$$

$$= 2a(-\cos t \sin t + \sin t \cos t)$$

$$= 0$$

Kein Zufall, allgemeiner Beweis folgt (siehe Satz 15.2)

c) <u>Darstellung durch Farbverlauf</u>



Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Wdh. $h(t) = f(g(t))$, f, g Fkt'en einer Variablen

$\Rightarrow \frac{d}{dt} h(t) = f'(g(t))\, g'(t)$ übliche K.R.

$t \rightsquigarrow t \in \mathbb{R}$

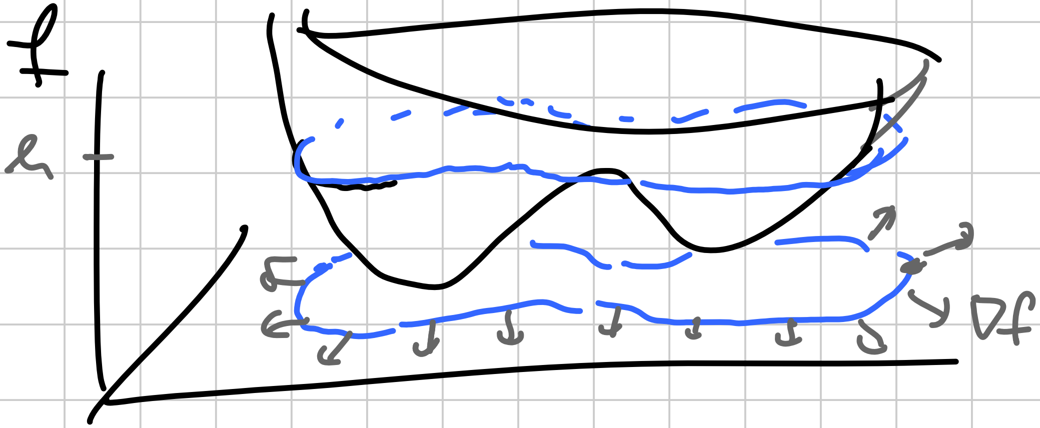
$g(t) \rightsquigarrow c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ .. muß n Komponenten haben

$f(x) \rightsquigarrow f(x_1, \dots, x_n)$ ... muß von n Variablen abhängen

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(c(t)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(c(t))\, c_j'(t) = \underbrace{\nabla f(c(t))}_{\text{Gradient}} \cdot \underbrace{c'(t)}_{\text{Tangentialvektor an Kurve im Pkt. } c(t)}}$$

<u>Folgerung:</u> <u>Satz 15.2</u> Falls $c(t)$ Höhenlinie von f, d.h. $f(c(t)) = h$ für alle t und ein h, gilt $\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = 0$, d.h. der Gradient steht senkrecht auf (dem Tangentialvektor) der Höhenlinie.

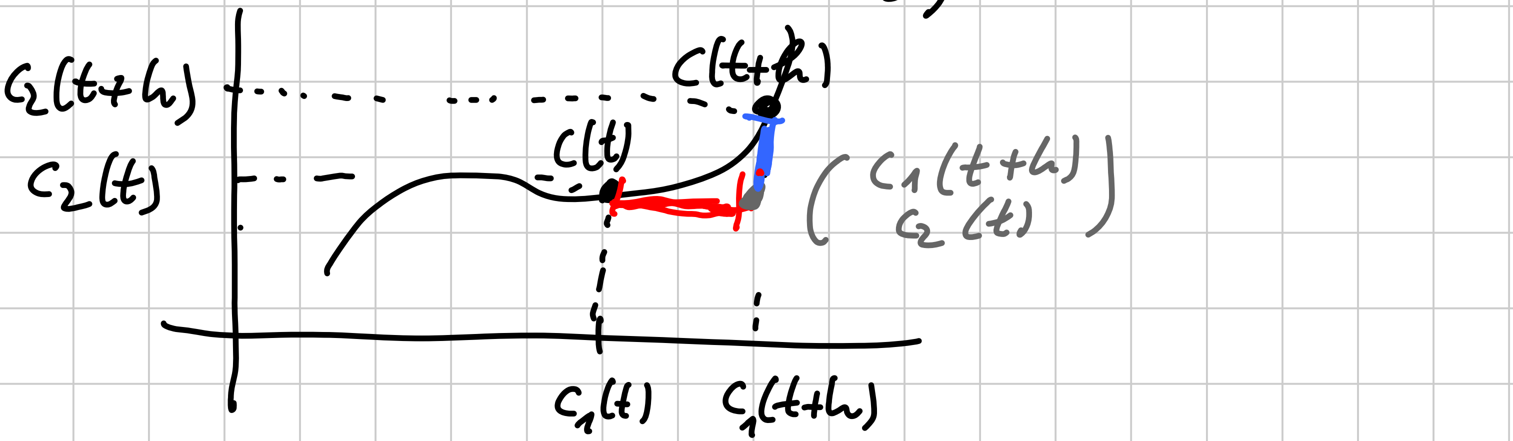
<u>Beweis:</u> $$0 = \frac{d}{dt} h \underset{\substack{\uparrow \\ c(t) \text{ Höhenlinie}}}{=} \frac{d}{dt} f(c(t)) \underset{\substack{\uparrow \\ KR}}{=} \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$



Herleitung der KR für n=2

$f = f(x,y)$, $\quad c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$

$$\text{KR: } \quad \frac{d}{dt} f(c_1(t), c_2(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(c_1(t), c_2(t))\, c_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(c_1(t), c_2(t))\, c_2'(t)$$



$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}}$$

$$= \frac{f(c_1(t+h), c_2(t+h)) - f(c_1(t), c_2(t))}{h}$$

Idee: Differenzenquotient in schräge Richtg. in zwei achsenparallele Diff. quotienten zerlegen, siehe Skizze

$$= \frac{f(c_1(t+h), c_2(t+h)) - f(\cancel{c_1(t+h)}, c_2(t))}{h}$$

$$+ \frac{f(\cancel{c_1(t+h)}, c_2(t)) - f(c_1(t), c_2(t))}{h}$$

$\underset{\text{KR in 1D}}{=}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c_1(t), c_2(t))\, c_2'(t)$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(c_1(t), c_2(t))\, c_1'(t).$$

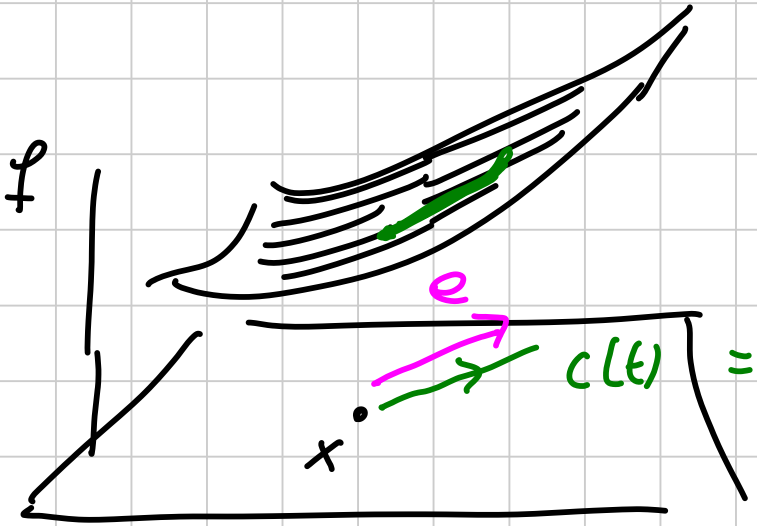
<u>Bsp</u> $f(x,y) = x e^{-y^2}$, $c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$

$$\frac{d}{dt} f(c(t)) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{-y^2} \\ -2xye^{-y^2} \end{pmatrix}, \quad c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f(c(t)) = \begin{pmatrix} e^{-(2t)^2} \\ -2\cos t \cdot 2t\, e^{-(2t)^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ 2t \end{pmatrix}$$

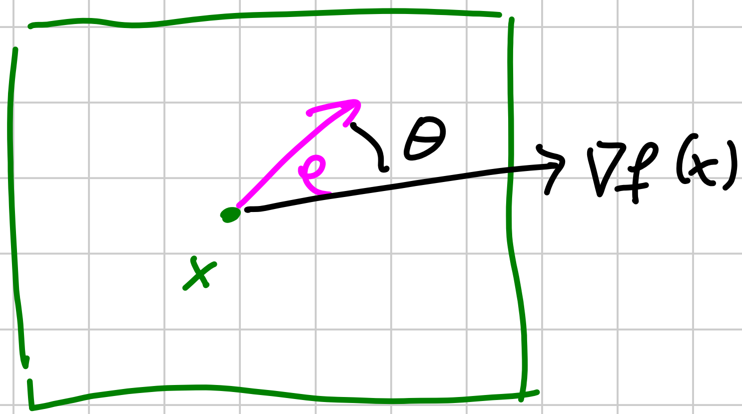
$$= \cos t\, e^{-4t^2} - 4t^2 \cos t\, e^{-4t^2}$$



$$c(t) = x + te, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}, \quad |e| = 1$$

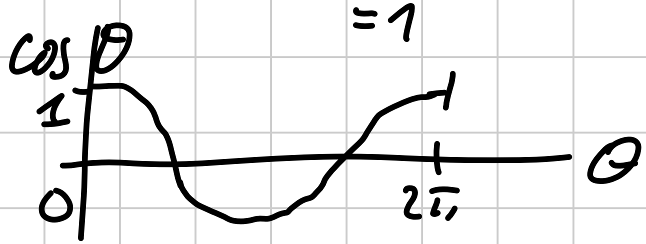
Richtungsableitung von f im Pkt x in Richtung e, $|e| = 1$:

$$\frac{d}{dt} f(x+te)\Big|_{t=0} \overset{KR}{=} \nabla f(x) \cdot \frac{d}{dt}(x+te) = \nabla f(x) \cdot e$$



Für welche Richtung e ist die Richtungsableitung maximal, d.h. in welche Richtg. steigt f am steilsten an?

$$\nabla f(x)\cdot e = |\nabla f(x)|\,\underbrace{|e|}_{=1}\cos\theta \quad \text{maximal}$$



$\Leftrightarrow$ $\cos\theta$ maximal

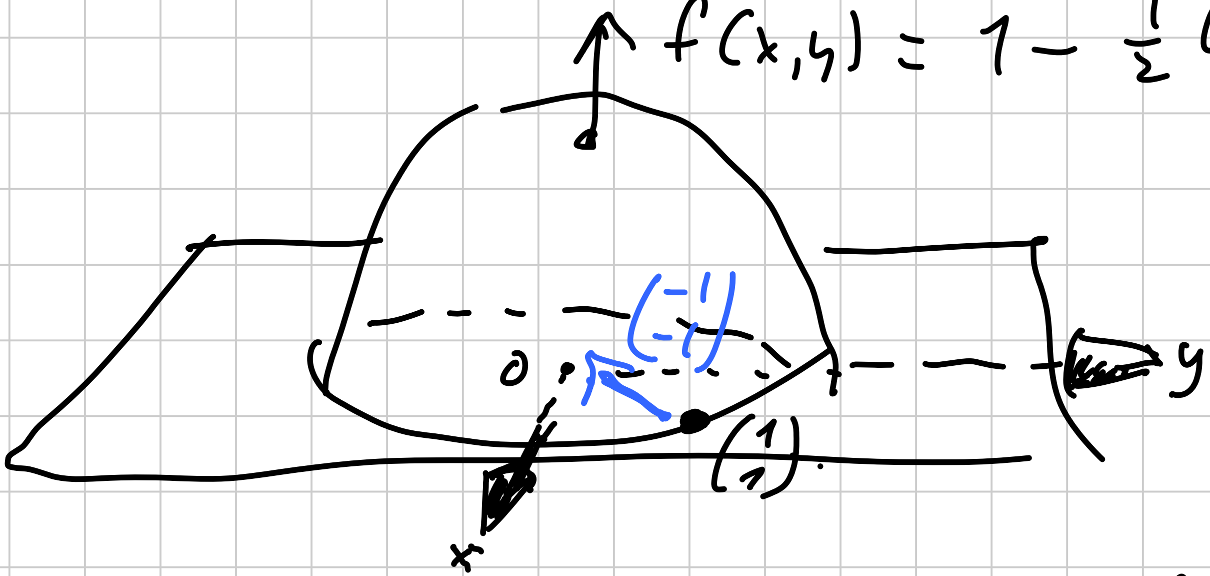
$\Leftrightarrow$ $\theta = 0$

$\Leftrightarrow$ e und $\nabla f(x)$ zeigen in selbe Richtg.

Also: **Satz 15.3** $\nabla f(x)$ zeigt in Richtg. des steilsten Anstiegs der Fkt. f. $|\nabla f(x)|$ ist die Steigung/Richtungsabl. in diese Richtg.

Beispiel

$f(x,y) = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2)$



Vom Punkt $\binom{1}{1}$ aus gesehen geht der direkte Weg zum Gipfel in Richtg 0, d.h. der Gradient sollte in Richtg. 0 zeigen. In der Tat:

$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ $\qquad \nabla f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$