§2 Logarithmus

Def. $\boxed{\log_B y \;=\; \text{diejenige Zahl } x\text{, sodass } B^x = y}$

B heißt Basis

$\log_B y$ heißt Logarithmus von y zur Basis B

Bsp'e $B = 10,\ y = 1000$ $\log_{10} 1000 = 3$, da $10^3 = 1000$

$B = 2,\ y = 32$ $\log_2 32 = 5$, da $2^5 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 32$

übliche Wahlen von B

$B = 10$ $\log_{10} y$

$B = 2$ $\log_2 y$

$B = e = 2{,}71828\ldots$ $\log y$ oder $\ln y$ logarithmus naturalis

↑ Euler'sche Zahl

$\log_e y = \log y = \ln y$ hat "schöne" Ableitung: $\frac{d}{dy} \log y = \frac{1}{y}$

<u>Liste von Zehnerpotenzen</u>

	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	1	10	10^2	10^3
Zahl	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1000
$\log_{10}$	-3	-2	-1	0	1	2	3

$\log_{10} 30 = ?$ 30 liegt zwischen 10 und 100

$\Rightarrow \log_{10} 30$ —"— 1 — "— 2

elektron. Gerät: $\log_{10} 30 = 1.47712\ldots$

<u>Logarithmusgesetze</u>

1) $\log_B (a \cdot b) = \log_B a + \log_B b$

2) $\log_B \left(\frac{a}{b}\right) = \log_B a - \log_B b$

3) $\log_B (a^n) = n \cdot \log_B a$

[$\log(a+b)$ kann man nicht vereinfachen]

Beweis von 1)

Idee: Gl. umformen, bis eine offensichtlich korrekte Gl. übrigbleibt

zu zeigen: $\log_B(a\cdot b) \overset{?}{=} \log_B a + \log_B b$ | B hoch beide Seiten

benutze: $B^{\log_B y} = y$ „x" aus Def.

$$\Rightarrow B^{\log_B(a\cdot b)} = B^{(\log_B a + \log_B b)}$$

$$B^{\log_B(a\cdot b)} = a\cdot b$$

Potenzgesetz: $B^{c+d} = B^c \cdot B^d$

$$B^{(\log_B a + \log_B b)} = B^{\log_B a}\cdot B^{\log_B b} = a\cdot b \quad \checkmark$$

Basiswechsel B = neue Basis, b = alte Basis

$$\boxed{\log_B y = \log_B b \cdot \log_b y}$$

Log bzgl. neuer Basis = Konstante · log bzgl. alter Basis

§ 3 Funktionen

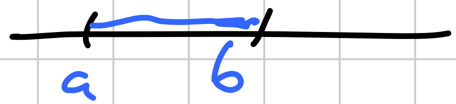
Fkt'en = mögliche Beziehungen zwischen Meßgrößen

- Definition
- Grundlegende Beispiele
- Wo kommen diese Bsp'e in den Nat. wiss. vor?

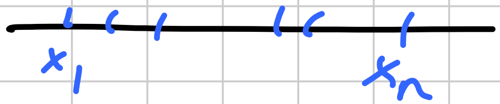
Definition Eine Funktion f ist eine Vorschrift, die "jeder" Zahl x genau eine Zahl $f(x)$ zuordnet.

"jeder": jeder Zahl aus einer Teilmenge der reellen Zahlen
(in Mathe heißt die Teilmenge "Definitionsbereich")

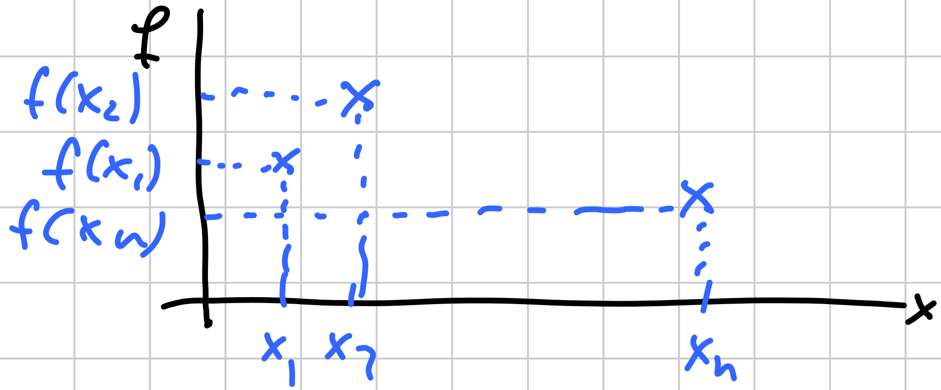
zB Intervall $a \leq x \leq b$



oder endliche Menge $x_1, \ldots, x_n$



Visualisierung



Grundtypen

1) lineare Funktion $f(x) = a \cdot x$, a Konstante

2) Affin lineare Funktion $f(x) = a \cdot x + b$, a, b Konstanten

$f(0) = b$ = Höhe des Schnittpunktes von Graph und y-Achse

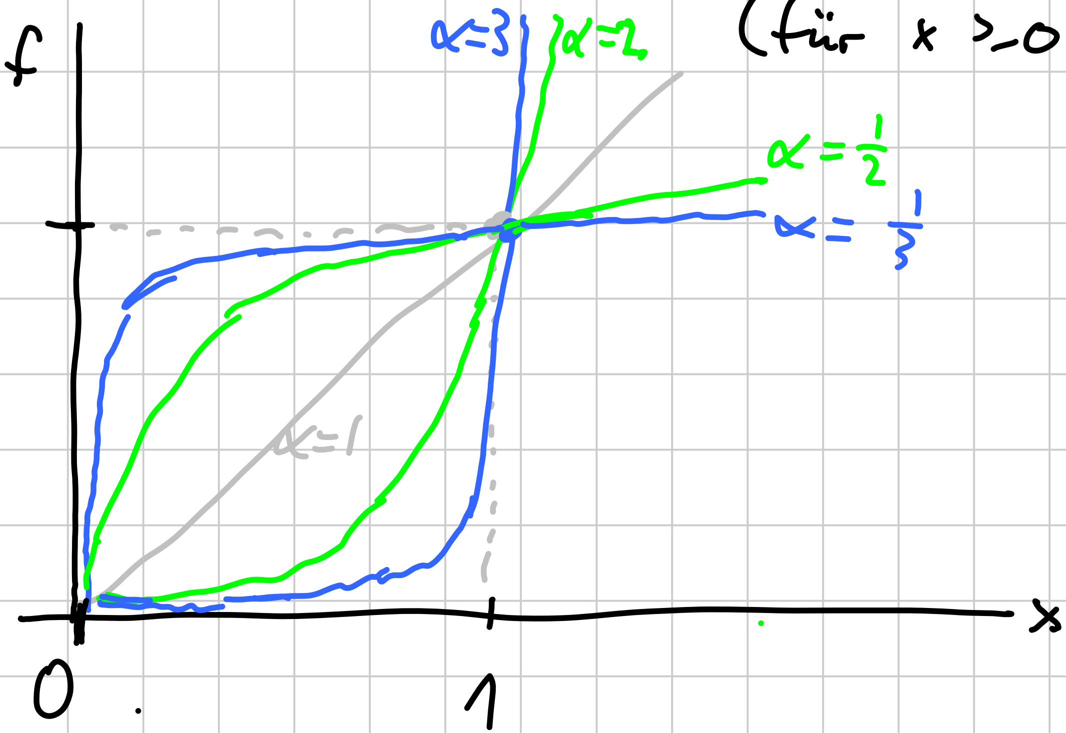
3) Quadratische Funktionen $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

a, b, c Konstanten

4) Potenzfunktionen $f(x) = a \cdot x^{\alpha}$, a, α Konstanten

(für $x > 0$)

Exponent muß nicht ganzzahlig sein



(Graphen für $a = 1$)

Def.: $y^{1/2} = \sqrt{y}$ = diejenige Zahl x sodaß $x^2 = y$

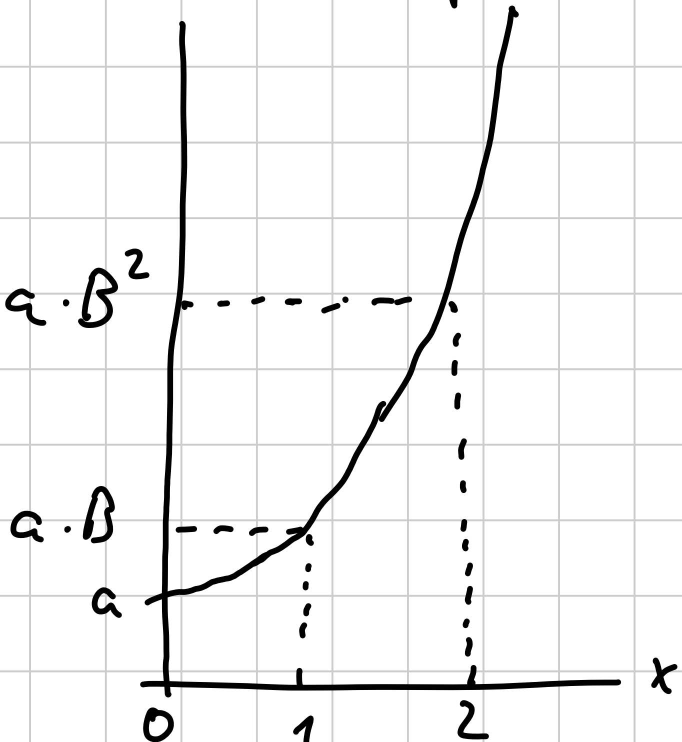
$y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$ = —— // —— $x^n = y$

$$\boxed{x^{1/3} = y \Leftrightarrow x = y^3}$$

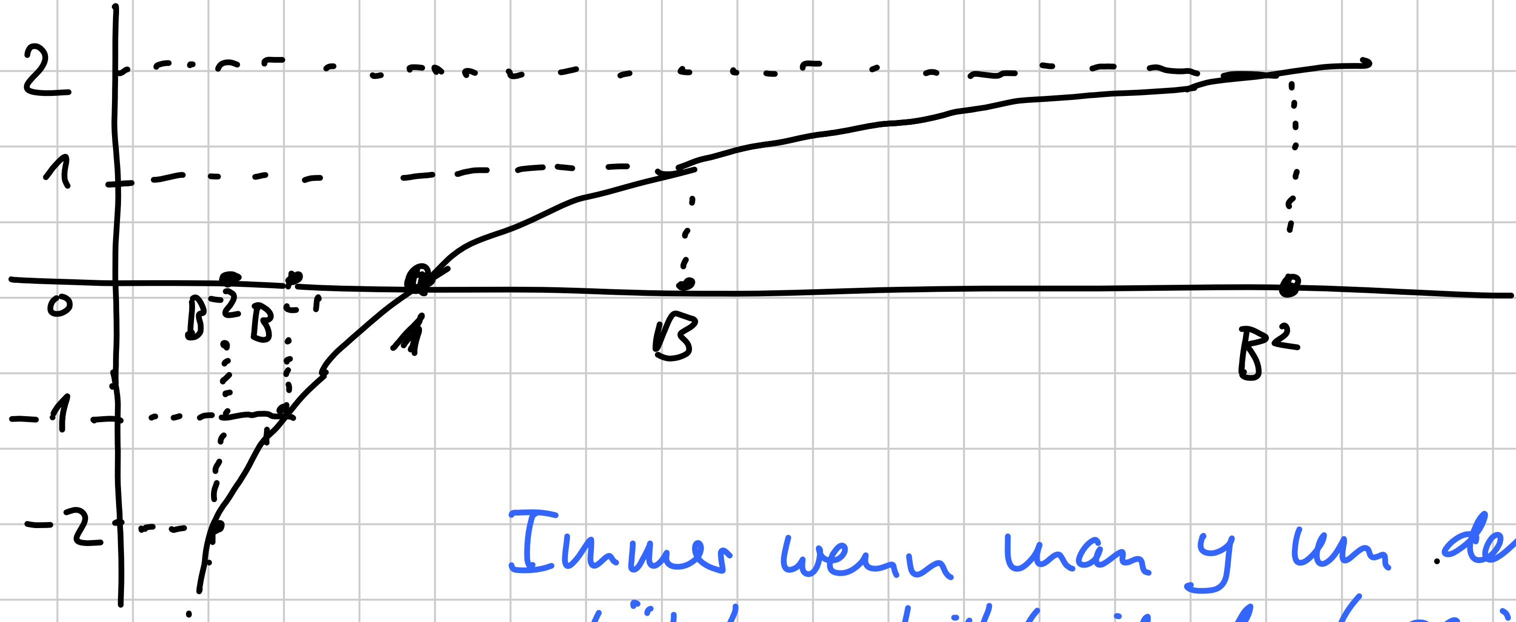
Graph von $x^{1/3}$ = Spiegelung an der Winkelhalbierenden von x^3

5) Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot B^x$, a, B Konstanten

B ↑ Basis



6) Logarithmusfunktion $\quad f(y) = \log_B y$, B positive Konstante, $y > 0$



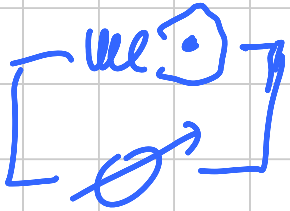
Immer wenn man y um den Faktor B erhöht, erhöht sich der Logarithmus um 1, denn

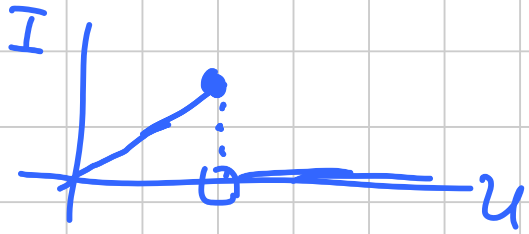
$$\log_B (y \cdot B) \underset{\text{Gesetz 1}}{=} \log_B y + \log_B B = \log_B y + 1$$

Beispiele aus Nat.- u. Ing.wissenschaften

1) Ohm'sches Gesetz $\quad I(U) = \frac{1}{R} \cdot U$

$$\text{Stromstärke} = \frac{1}{\text{Widerstand}} \cdot \text{Spannung}$$





3) Bremsweg: $b(v) = \frac{1}{2\gamma} \cdot v^2$

Bremsweg = Konstante · Geschwindigkeit^2

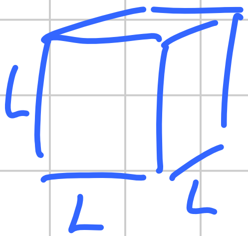
$\uparrow$

γ = Bremskraft pro Masse

4) Abgegebene Wärme bei Tieren als Fkt. des Gewichts:

Potenzfkt. mit Exponent $\alpha < 1$ (≈ 0.6)

Grobe Erklärung (würfelförmige Tiere)



Oberfläche $= 6L^2$ (1)

Volumen $= L^3$ (2)

(2) nach L auflösen $\Rightarrow$ $Vol^{1/3} = L$

in (1) einsetzen $\Rightarrow$ $\underbrace{\text{Oberfläche}}_{\text{abgeg. Wärme}} = 6 \cdot \underbrace{Vol}_{\text{Gewicht}}^{2/3}$

also Wärme $\approx$ Konstante $\cdot$ (Gewicht)$^{0.666\ldots}$

5) a) Anzahl Bakterien in einer sich durch Teilung vermehrenden Kolonie als Fkt. der Zeit (in min.)

$$N(t) = N(0) \cdot 2^{t/a}, \quad a: \text{Teilungszeit}$$

(E-Coli 20 min.)

$$= N(0) \cdot \underbrace{\left(2^{1/a}\right)}_{\text{Basis}}{}^{t}$$

Alle 20 min. verdoppelt sich die Anzahl

5) b) Genetische Diversität

$A(n)$ = Anzahl verschiedener DNA-Sequenzen mit n Basenpaaren

A A T C G C A T A A G C ...

$\underbrace{A}_{}$ 4 Mögl. A, T, C, G

16 Mögl. AA, AT, AC, AG, TA, TT, TC, TG, CA, CT, CC, CG, GA, GT, GC, GG

$\rightsquigarrow A(n) = 4^n$

5) c) Antahl mit n Bits darstellbarer Zahlen

0 1 1 0 0 1 0 1 0 1 1 1 0 1 ...

2 Mögl. 0, 1

4 Mögl. 00, 01, 10, 11

⋮

$\rightsquigarrow A(n) = 2^n$

6) a) Menschl. Reaktion auf physikal. Reize hängt oft nur logarithmisch von der Reizstärke ab.

("Gesetz von Weber - Fechner")

$$L\,[dB] = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

L = Lautstärke in Dezibel

I = Intensität d. Schallwelle $\left[\frac{\text{Watt}}{m^2}\right]$

$I_0 = 10^{-12}\left[\frac{\text{Watt}}{m^2}\right]$ Grenze hörbarer Intensität

Falls $I = I_0$, ist $L\,[dB] = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{I_0}{I_0}\right) = 0\,[dB]$

6b) Richter - Skala (Erdbeben)

$\log_{10}$ (Amplitude der Erdwellen)

Stärke 9 ist 10 mal so "schlimm" wie Stärke 8.