§15 Funktionen mehrerer Veränderlicher

Viele Fkt'en i.d. Praxis hängen von mehreren Veränderlichen ab

Ziel

- Vektor-/Matrixschreibweise
- Ableitung
- Maxima/Minima finden

1. Definition und Beispiele

<u>Def.</u> Eine Funktion von n Veränderlichen ist eine Vorschrift, die "jedem" *) Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1, \dots, x_n$ reelle Zahlen, genau eine Zahl $f(x_1, \dots, x_n)$ zuordnet.

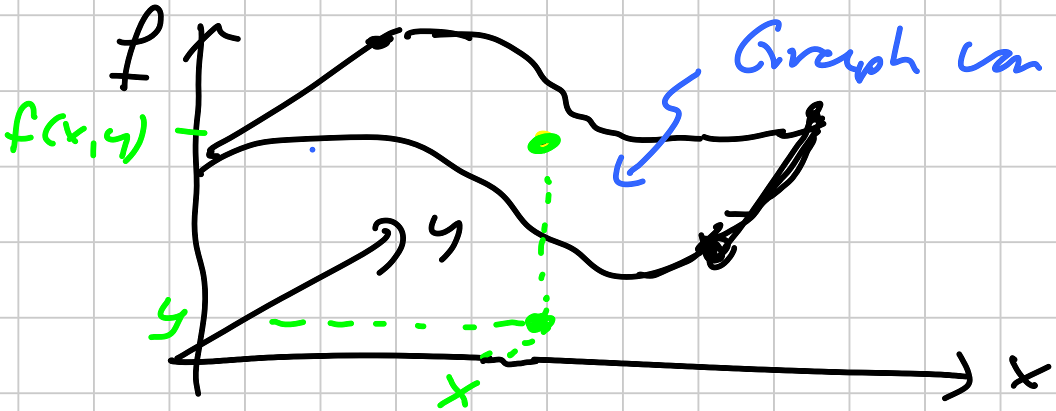
Def. Die Menge aller Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $x_1, \ldots, x_n$ reelle Zahlen, heißt $\mathbb{R}^n$ (sprich: R hoch n)

*) jedem Vektor aus einer Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, dem "Definitionsbereich" der Funktion.

Visualisierung für $n=2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f = f(x, y)$$

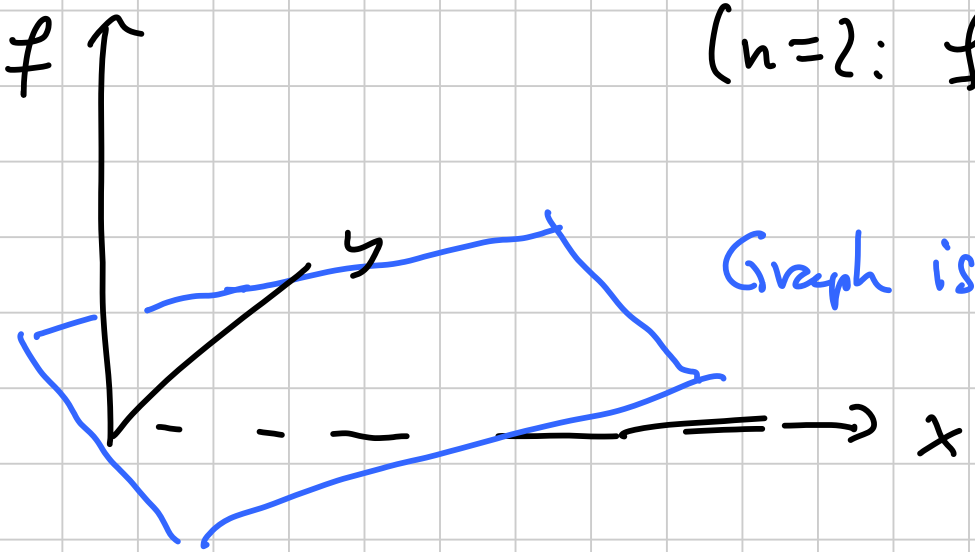


Graph von f ist eine Fläche im 3D Raum

Beispiele 1) Lineare Funktionen

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

$a_1, \dots, a_n$ Konstanten



($n=2$: $f(x,y) = ax + by$

a, b Konstanten)

Graph ist eine Ebene im 3D Raum

2) Quadratische Funktionen:

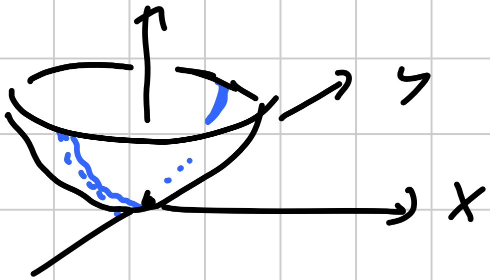
$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, x_i x_j \,, \quad A_{ij} \; (i,j = 1, \dots, n)$$

Konstanten

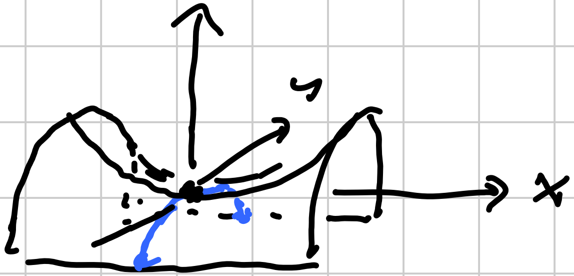
[$n=2$: $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, a, b, c Konstanten]

2 typische Fälle

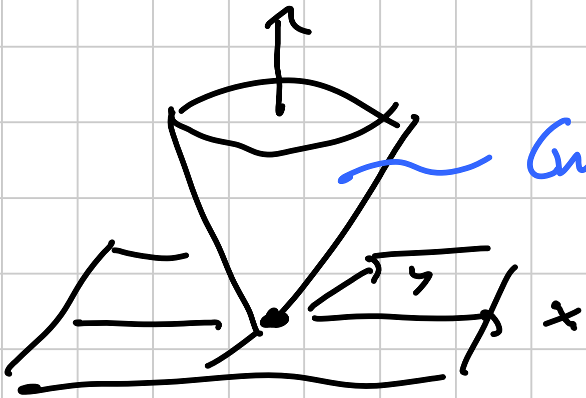
$f(x,y) = x^2 + y^2$



$f(x,y) = x^2 - y^2$



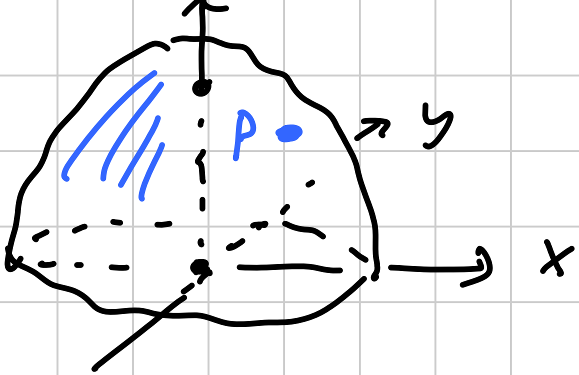
3) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



Graph = Kegel

4) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$, Definitionsbereich:
$\binom{x}{y}$ sodass $x^2+y^2 \le 1$
Kreisscheibe

f



Graph ist eine
(Halb-) Kugelschale

Wieso Kugelschale? Punkt auf Graph hat die Form

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

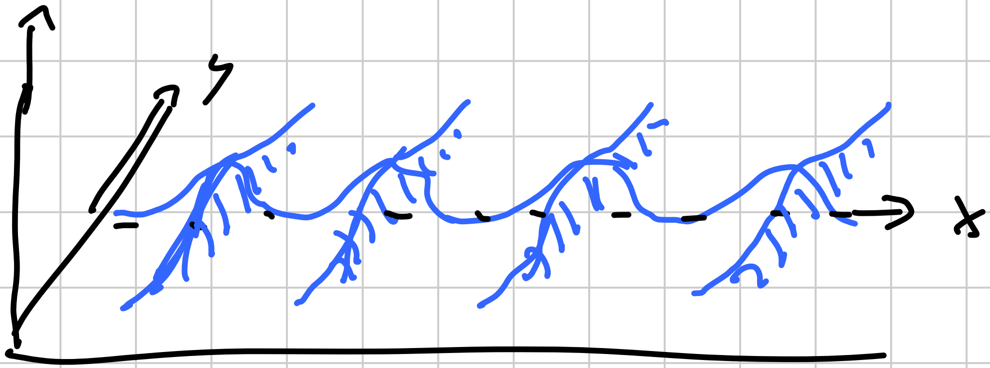
Abstand von O = Länge des Vektors
von O nach P

$$= \sqrt{P_1^2+P_2^2+P_3^2}$$

Hier: $P_1^2+P_2^2+P_3^2 = \cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\underbrace{\sqrt{1-(x^2+y^2)}^{\,2}}_{=1-(\cancel{x^2}+\cancel{y^2})}$

$= 1$

5) $f(x,y) = \sin^2 x \cdot e^{-y^2}$



2. Vektor- und Matrixschreibweise

Vektoren: $\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Ein Vektor, ein Name ("x")

x_i = i^{te} Komponente des Vektors x

Matrizen: $\quad A = \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$

$n \times n$ Matrix = Tabelle mit n Zeilen, n Spalten

A_{ij} = Eintrag in $i$ten Zeile und $j$ten Spalte der Matrix A

Bsp $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad A_{22} = 4$

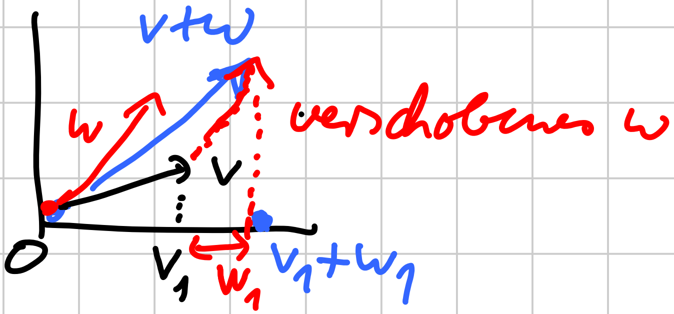
Rechenoperationen

- Addition von Vektoren

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

(Komponenten= weise)

geom. Bedeutung in $n=2$ oder 3:



- Fußpunkt von w an die Spitze von v verschieben
- $v+w$ zeigt vom Fußpunkt von v zur Spitze des verscho= benen w

Siehe Skizze

- Addition von Matrizen

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1n}+B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1}+B_{n1} & \cdots & A_{nn}+B_{nn} \end{pmatrix}$$

(komponentenweise)

- Skalarprodukt von Vektoren

$$v \cdot w = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$$

- Matrix-Vektor-Multiplikation

$$Av = \begin{pmatrix} (Av)_1 \\ \vdots \\ (Av)_n \end{pmatrix}, \quad (Av)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} v_j$$

i-te Komp. von Av

i-te Zeile von A

Insbesondere: Skalarprodukt = Zahl

Matrix-Vektor-Produkt = Vektor

Beispiele

1) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$v \cdot w = 1 \cdot 7 + 2 \cdot (-1) = 7 - 2 = 5$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vektorschreibweise linearer Funktionen:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = a \cdot x$$

Skalarprodukt eines konstanten Vektors a mit dem Koordinatenvektor x

Bsp: $f(x,y) = 2x - y$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Matrixschreibweise quadratischer Funktionen

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \, x_i \, x_j$$

$$f(x) = \underbrace{Ax}_{\substack{\text{Matrix-Vektor-}\\\text{Produkt}\\= \text{Vektor}}} \underbrace{\cdot}_{\text{Skalarprodukt}} x \qquad (*)$$

wobei $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$ konstante $n \times n$ Matrix

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Koordinatenvektor

Bsp $(n=2)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x+2y)x + (3x+4y)y$$

$$= \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix} \qquad = x^2 + 2yx + 3xy + 4y^2$$

$$= x^2 + 5xy + 4y^2$$

3. Ableitung

Def. Sei f eine Funktion von n Variablen. Die partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

griechischer Buchstabe (Delta)

(Alle anderen x_i festhalten, nach x_j ableiten)

<u>Beispiele</u> 1) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - 2y$$

üblicher Regel $(y^2)' = 2y$

denn x^2 hängt nicht von y ab,
ist also eine "Konstante"

2) $f(x,y) = x^2 - x\, y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 - 2xy$$

x ist bzgl. y eine "Konstante"

3) $f(x,y) = e^{-y^2} \sin^2 x + e^{-x^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y\, e^{-y^2} \sin^2 x + 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-y^2} (2 \sin x \cdot \cos x) - 2x\, e^{-x^2}$$

Zusammenfassung: partiell nach x ableiten = so tun, als ob y Konstante, und dann "wie immer" ableiten

Def. Der Vektor der partiellen Ableitungen von f nach $x_1, \dots, x_n$ an der Stelle x heißt Gradient von f an der Stelle x,

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Bsp'e

1) $f(x,y) = x^2 - y^2$ $\qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$

2) $f(x,y) = 2x - 3y$ $\qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

3) $f(x,y) = ax + by$ $\qquad \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

4) $f(x) = a \cdot x$ $\qquad \nabla f(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a$

($= a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$
wg. Def. des Skalarprodukts)

Die Regel $f(x) = a \cdot x \Rightarrow \nabla f(x) = a$

ist eine Verallg. der 1D Ableitungsregel

$$f(x) = ax, \quad x \text{ 1D} \quad \Rightarrow f'(x) = a$$