Taylorentwicklung

July 7, 2017

Wir wollen komplizierte Funktionen durch möglichst einfache Funktionen approximieren.
Fragen: Wie lässt sich eine Funktion durch eine Polynom approximieren? Gelingt das auch bei allen Funktionen?

Beispiel: Exponentialfunktion $f(x) = exp(x)$

1. Approximation durch eine **konstante** Funktion: $f(x) \approx f(x_0)$
   Für $x_0 = 0$ wird $f(x) = exp(x)$ durch die konstante Funktion $p_0(x) := exp(0) = 1$ approximiert.

2. Approximation durch eine **lineare** Funktion: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
   Da f an der Stelle x_0 differenzierbar ist und uns die Ableitung $f'(x_0)$ bekannt ist, können wir die Funktion $f(x)$ durch ihre Tangente $p_1(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ an der Stelle $(x_0, f(x_0))$ approximieren. Damit erhalten wir für $x_0 = 0$

   $$p_1(x) := exp(0) + exp'(0)(x - 0) = 1 + x.$$

   Diese Approximation ist schon besser als unsere erste Approximation $p_0(x)$. Man sieht aber (Figure 1), dass der Fehler umso größer wird, je mehr sich x vom Punkt $x_0 = 0$ unterscheidet.

3. Approximation durch eine **quadratische** Funktion $f(x) \approx a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 =: p_2(x)$
   Das Polynom $p_2(x)$ sollte in $x = x_0$ den gleichen Funktionswert, die gleiche erste Ableitung und die gleiche zweite Ableitung haben wie $f(x)$, d.h.

   $$p_2(x_0) = f(x_0), \quad p_2'(x_0) = f'(x_0), \quad p_2''(x_0) = f''(x_0).$$

   Hieraus folgt, dass

   $$a_0 = f(x_0), \quad a_1 = f'(x_0), \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2}.$$

   Für die Exponentialfunktion an der Stelle $x_0 = 0$ ergibt sich

   $$a_0 = \exp(0) = 1, \quad a_1 = \exp'(0) = 1, \quad a_2 = \frac{\exp''(0)}{2} = \frac{1}{2}$$

   und damit erhalten wir als nächste Approximation der exponentialen Funktion die quadratische Funktion

   $$p_2(x) = exp(0) + exp'(0)(x - 0) + \frac{exp''(0)}{2}(x - 0)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

   Unsere Näherung wird immer besser. Sehen Sie sich dafür noch mal Figure 1 an.

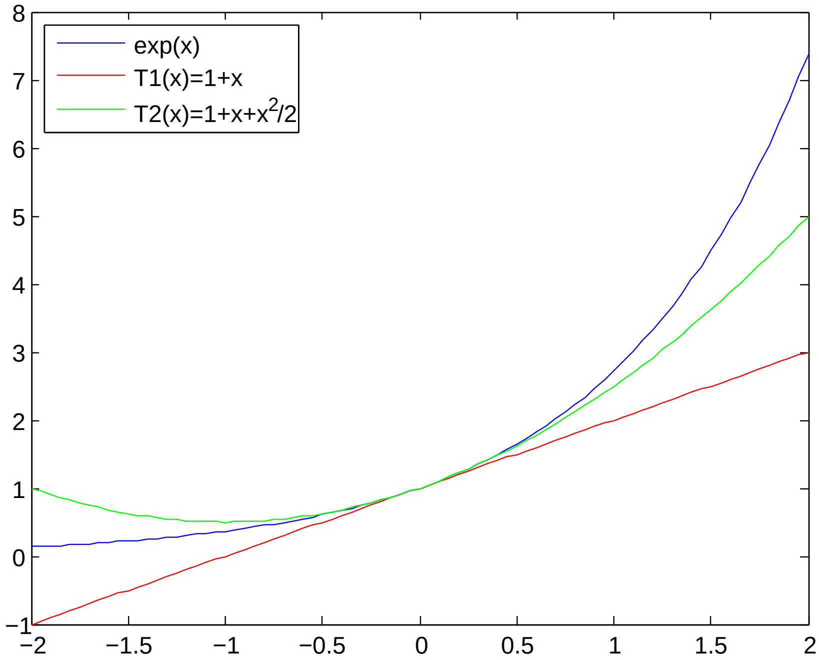

Figure 1: Exponentialfunktion und Taylorpolynome bis zum Ordnung 2

Bezeichnungen:

- $f^{(k)}(x_0)$ bezeichnet die k-te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle x_0;
- $k!$ heißt k- Faktorielle, d.h. $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$.

Ansatz: Wir nehmen an, die Funktion $f(x)$ lässt sich als Polynom in folgender Form darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k.$$

Unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ beliebig oft differenzierbar ist, ist die Bestimmung der Koeffizienten a_n möglich. Dabei sind die Koeffizienten a_i so gewählt, dass die ersten n- Ableitungen von f und das Polynom an der Stelle x_0 übereinstimmen.
Wir berechen die Ableitungen an der Stelle $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n && \Rightarrow f(0) = a_0 \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} && \Rightarrow f'(0) = a_1 \\
f''(x) &= 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} && \Rightarrow f''(0) = 2a_2 \\
f'''(x) &= 3 \cdot 2a_3 + \ldots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} && \Rightarrow f'''(0) = 3 \cdot 2a_3 = 3! a_3 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot a_n = n! a_n && \Rightarrow f^{(n)}(0) = n! a_n
\end{aligned}$$

und damit

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \quad \ldots \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

MacLaurinpolynom Das Polynom

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

heißt das Taylorpolynom n-ten Grades von f im Entwicklungspunkt 0, bekannt noch als **MacLaurinpolynom**.

Die Entwicklung einer Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ als Taylorreihe lautet:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Verallgemeinerung: Wenn wir die Ableitungen an einer beliebigen Stelle x_0 betrachten, erhalten wir das Taylorpolynom n-ten Grades von f im Entwicklungspunkt x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Taylorentwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Die Approximation ist umso besser je näher x an der Entwicklungstelle x_0 ist und je größer die Ordnung n ist.

Taylorentwicklung häufig gebrauchter Funktionen

1. Exponentialfunktionen
   (a) $f(x) = \exp(x)$
   $$f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1.$$
   Damit ergibt sich als Entwicklung
   $$exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$
   und
   $$exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
   (b) $f(x) = exp(-x)$
   $$f(0) = 1, \quad f'(0) = (-1)^1, \quad f''(0) = (-1)^2, \quad f'''(0) = (-1)^3, \quad \ldots f^{(n)}(0) = (-1)^n.$$
   $$exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}.$$
   (c) $f(x) = a^x$
   Für die n-te Ableitung gilt: $f^{(n)}(x) = a^x (\ln a)^n$ und damit
   $$a^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n.$$
2. Trigonometrische Funktionen

(a) $f(x) = \sin x$

$$\begin{array}{lllll} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x, & f'''(x) = -\cos x, & f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow \\ f(0) = 0, & f'(0) = 1, & f''(0) = 0, & f'''(0) = -1, & f^{(4)}(0) = 0. \end{array}$$

Bei einer Entwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ verschwinden alle geraden Ableitungen. Es bleiben nur ungerade Ableitungen, d.h. $a_{2n+1} = f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ und daher

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(a) $f(x) = \cos x$

$$\begin{array}{lllll} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, & f''(x) = -\cos x, & f'''(x) = \sin x, & f^{(4)}(x) = \cos x \Rightarrow \\ f(0) = 1, & f'(0) = 0, & f''(0) = -1, & f'''(0) = 0, & f^{(4)}(0) = 1. \end{array}$$

Bei einer Entwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ verschwinden alle ungeraden Ableitungen. Es bleiben nur gerade Ableitungen, d.h. $a_{2n} = f^{(2n)}(0) = (-1)^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ und damit

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$