Nächste Woche: MATLAB-Praktikum (dafür keine VL, keine Übg.)

1. Gruppe: Di, 27.06, von 12:00 bis 14:15 (1 Block - 3 Stunden)

2. Gruppe: Di, 27.06, von 14:30 bis 16:45 (1 Block - 3 Stunden)

1. Gruppe: Mi, 28.06, von 8:30 bis 10:45 (2 Block - 3 Stunden)

2. Gruppe: Fr, 30.06, von 13:30 bis 15:45 (2 Block - 3 Stunden)

Raum BC 2 0.01.16 in Garching Hochbrück

Bitte in TUM online für eine Gruppe anmelden

Bitte möglichst gleichmäßig auf die beiden Gruppen verteilen

§ 13 Newton'sche Bewegungsgleichungen numerisch lösen

(Vorbereitung auf MATLAB - Praktikum Teil 2 Mi/Fr)

Wdh aus VL 12:

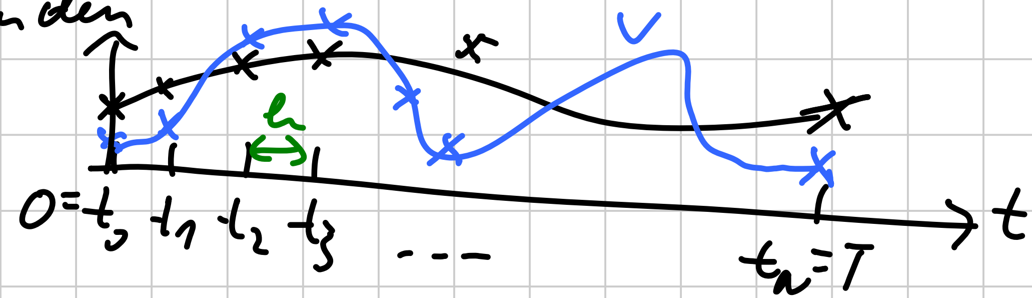
Masse · Beschleunigung = Kraft $\Leftrightarrow$ $m x''(t) = f(x(t))$ (N)
Newton II

Tutorübungen: Können (N) als System von 2 Dgl'en 1. Ordng. auffassen: $v = x'$

$$(N) \iff \begin{aligned} x' &= v \\ v' &= \frac{1}{m} f(x) \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m} f(x) \end{pmatrix} \quad (N')$$

(selbe Form wie z.B. bei Enzymkinetik)

Einfachste numerische Lösungsmethode: explizites Eulerverfahren auf (N') anwenden



Updating-Schritt: $\frac{1}{h}\left[\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} v_n \\ \frac{1}{m} f(x_n) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ Auflösen nach $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$

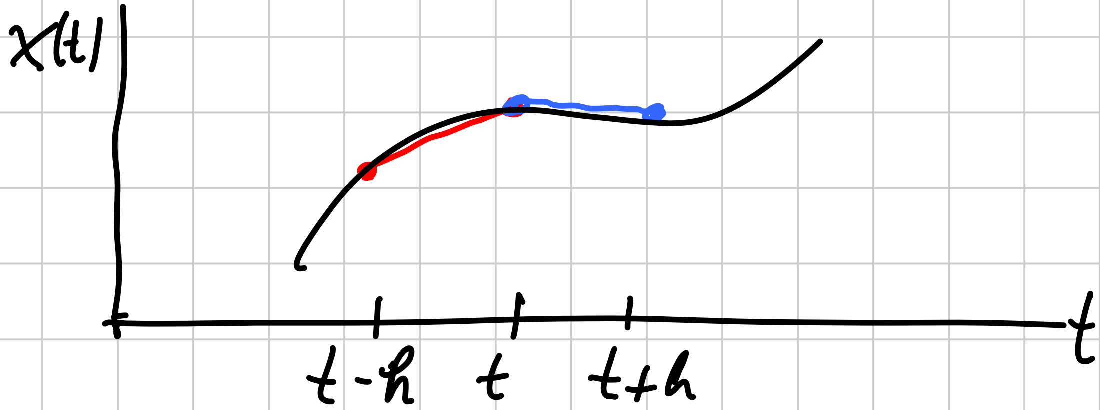
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ v_n \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} v_n \\ \frac{1}{m} f(x_n) \end{pmatrix}$$

⚠ Nicht sehr genau ...

Symmetrisches Eulerverfahren (viel genauer ...)

Idee: 2. Ableitung (Beschleunigung) direkt diskretisieren
d.h. durch Differenzenquotienten ersetzen

1) Erster Diff.quotient: 2 Möglichkeiten



(1) $$x'(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$ Steigung blaue Strecke (Vorwärtsdifferenzenquotient)

(2) $$x'(t) \approx \frac{x(t) - x(t-h)}{h}$$ Steigung rote Strecke (Rückwärtsdiff.quotient)

Im Grenzwert h gegen Null beide Näherungen exakt

2) 2. Ableitung

Näherungen (1) oder (2) 2mal anwenden $\rightsquigarrow$ Näherung für $x''(t)$

$$x''(t) \underset{(1)\text{ für } x' \text{ statt } x}{\approx} \frac{x'(t+h) - x'(t)}{h}$$

$$\underset{\substack{(2)\text{ für } x \text{ an den}\\ \text{Stellen } t+h \text{ u. } t}}{\approx} \frac{\frac{x(t+h) - x(t)}{h} - \frac{x(t) - x(t-h)}{h}}{h}$$

$$= \boxed{\frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2}} \quad (*)$$

Was passiert bei 2mal vorwärts?

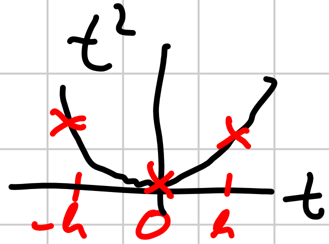
$$x''(t) \underset{(1)\text{ für } x'}{\approx} \frac{x'(t+h) - x'(t)}{h}$$

$$\underset{(1)}{\approx} \frac{\frac{x(t+2h)-x(t+h)}{h} - \frac{x(t+h)-x(t)}{h}}{h}$$

$$= \frac{x(t+2h) - 2x(t+h) + x(t)}{h^2} \qquad (*)'$$

nicht so gut, da weiter entfernte Werte von x einbezogen werden müssen

Bsp $\quad x(t) = t^2$



Gesucht: Näherung für $x''(0)$

Exakt: $x'(t) = 2t$, $x''(t) = 2$, $x''(0) = 2$

Näherung $(*)$:

$$x''(0) \approx \frac{x(h) - 2x(0) + x(-h)}{h^2}$$

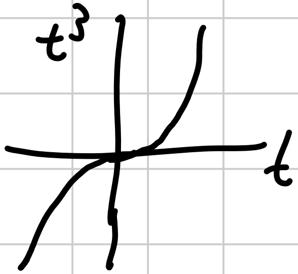
$$= \frac{h^2 - 2\cdot 0 + h^2}{h^2} = 2$$

Näherung $(*')$:

$$x''(0) \approx \frac{x(2h) - 2x(h) + x(0)}{h^2}$$

$$= \frac{4h^2 - 2h^2 + 0}{h^2} = 2$$

$x(t) = t^3 \qquad x'(t) = 3t^2 \qquad x''(t) = 6t \qquad x''(0) = 0$



$(*)$: $$x''(0) \approx \frac{x(h) - 2x(0) + x(-h)}{h^2}$$

$$= \frac{h^3 - 2\cdot 0 - h^3}{h^2} = 0$$

$(*)'$: $$x''(0) \approx \frac{x(2h) - 2x(h) + x(0)}{h^2}$$

$$= \frac{8h^3 - 2h^3 + 0}{h^2} = 6h \neq 0$$

$\rightsquigarrow$ $(*)$ ist, selbst bei endlichem h, exakt für alle x der Form $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$

Numerisches Lösungsverfahren durch Einsetzen v. (∗) in (N)

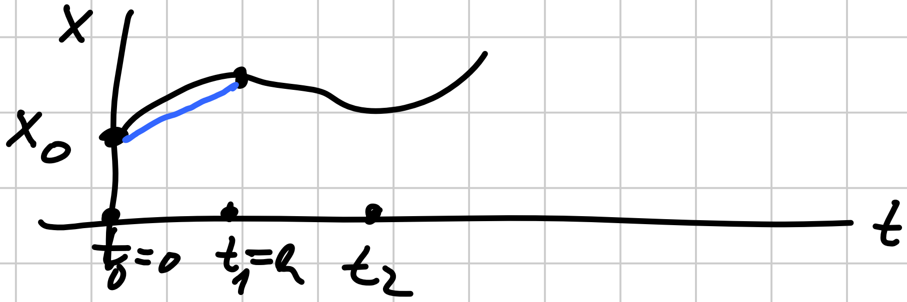
$$m \frac{x(t+h) - 2x(t) + x(t-h)}{h^2} \simeq f(x(t)) \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}, \cdot h^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t+h) - 2x(t) + x(t-h) = \frac{h^2}{m} f(x(t)) \quad \Big| + 2x(t) - x(t-h)$$

$$\Leftrightarrow \quad x(t+h) = 2x(t) - x(t-h) + \frac{h^2}{m} f(x(t))$$

Aus Kenntnis von $x(t)$ und $x(t-h)$ lässt sich $x(t+h)$ bestimmen.

Anfangsbedingung: 2 Werte, $x(t_0)$ und $x(t_1)$



Exakte Theorie: $x(0) = x_0$

$x'(0) = v_0$ $\quad$ x_0, v_0 gegeben

$$x'(0) \underset{(1)}{\approx} \frac{x(h) - x(0)}{h}$$

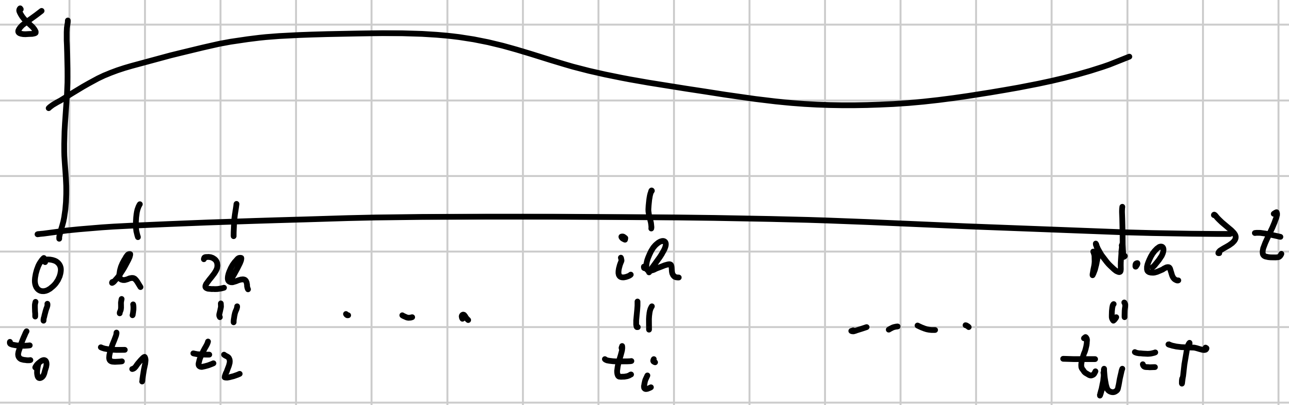
$$\rightsquigarrow \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ \frac{x(h) - x(0)}{h} &= v_0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(h) &= x(0) + h v_0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(h) &= x_0 + h \cdot v_0 \end{aligned}}$$

Symmetrisches Euler-Verfahren

① Zeitachse diskretisieren, $h>0$ Schrittweite



$N = \frac{T}{h}$ Anzahl Schritte

Diskrete Zeitpunkte: $t_i = i \cdot h, \quad i = 0, 1, \ldots, N$

② $x(t_0) = x_0$ (vorgegebene Anfangsposition)

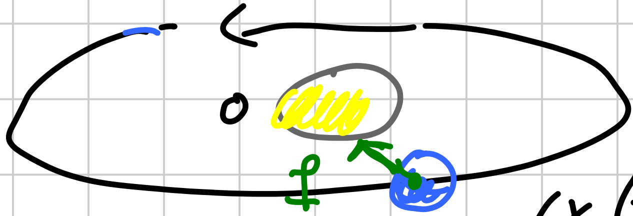
$x(t_1) = x_0 + h \cdot v_0$ (v_0 vorgegebene Anfangsgeschwindigk.)

$x(t_{i+1}) = 2x(t_i) - x(t_{i-1}) + \frac{h^2}{m} f(x(t_i)) \quad i = 1, \ldots, N-1$

Bsp 1 Schwingungsgl. $\quad m x'' = -x$

$f(z) = -z$ Kraft als Fkt. der Auslenkg.

Bsp 2 Planetenbewegung



$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$m\, x''(t) = f(x(t))$$

f zeigt in Richtung der Sonne, und der Absolutbetrag (d.h. die Länge des Kraftvektors) ist proportional zu $1/\text{Abstand}^2$

$$\Rightarrow f = -A \cdot \frac{x(t)}{|x(t)|}$$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Länge od. Absolutbetrag:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$A = \frac{1}{|x(t)|^2}$ (Länge des Kraftvektors $= \frac{1}{\text{Abstand}^2}$)

$$\Rightarrow f = -\frac{x(t)}{|x(t)|^3}$$

Euler-Verfahren:

$$\underbrace{x(t+h)}_{= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}(t+h) \text{ Positionsvektor}} = 2\,x(t) - x(t-h) + \frac{h^2}{m}\underbrace{f(x(t))}_{\text{Kraftvektor}}$$