[noch: Erzwungene Schwingungen mit Dämpfung]

$$(S') \quad m y'' + \gamma y' + k y = F_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Big| \cdot \frac{1}{m}, \quad \omega_u = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Freq. ungedämpftes Sys.

$$\Leftrightarrow \quad y'' + \frac{\gamma}{m} y' + \omega_u^2 y = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_0 t)$$

1. Spezielle Lsg   Ansatz $y = \sigma \cos(\omega_0 t - \delta)$

System schwingt mit Anregungsfreq.

Einsetzen in (S'):

$$y' = -\sigma \omega_0 \sin(\omega_0 t - \delta)$$
$$y'' = -\sigma \omega_0^2 \cos(\omega_0 t - \delta)$$

$$\Rightarrow \quad (\omega_u^2 - \omega_0^2)\sigma \underbrace{\cos(\omega_0 t - \delta)}_{\cos \omega_0 t \cos\delta + \sin \omega_0 t \sin\delta} - \frac{\gamma}{m}\omega_0 \sigma \underbrace{\sin(\omega_0 t - \delta)}_{= \sin(\omega_0 t)\cos\delta - \cos(\omega_0 t)\sin\delta} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_0 t)$$

Vorfaktoren v. $\cos\omega_0 t$ und $\sin \omega_0 t$ rechts u. links müssen gleich sein

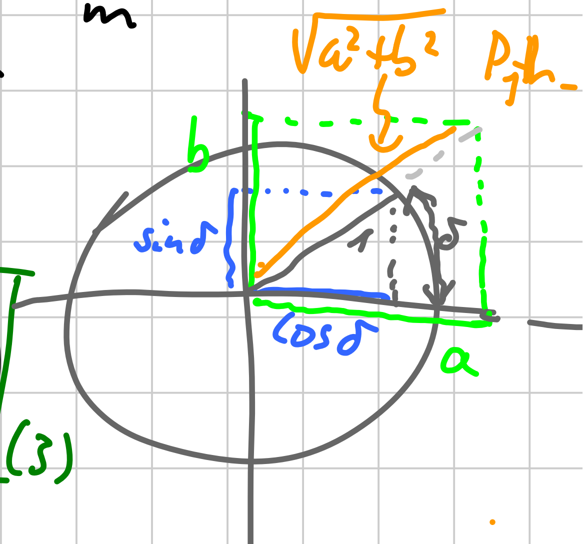
$$\Rightarrow \quad (1) \quad (\omega_u^2 - \omega_0^2)\sigma \cos\delta + \frac{\gamma\omega_0}{m}\sigma \sin\delta = \frac{F_0}{m}$$

$$(2) \quad \underbrace{(\omega_u^2 - \omega_0^2)}_{a} \cancel{\sigma} \sin\delta = \underbrace{\frac{\gamma\omega_0}{m}}_{b} \cancel{\sigma} \cos\delta$$

$$(2) \Rightarrow \quad \frac{\sin\delta}{\cos\delta} \left(= \tan\delta\right) = \frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\gamma\omega_0/m}{\omega_u^2 - \omega_0^2}\right)} \quad (3)$$

Geometrie $\Rightarrow \cos\delta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,



$$\sin\delta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Einsetzen in (1) $\Rightarrow$ $$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sigma + \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sigma = \frac{F_0}{m}$$

$$\begin{aligned} &\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\sigma \\ &\qquad \text{ ‖ } \leftarrow \quad \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} \\ &\sqrt{a^2+b^2}\,\sigma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_u^2-\omega_0^2)^2+\left(\frac{\gamma\omega_0}{m}\right)^2}}} \quad (4)$$

Also $y_*(t) = \sigma\cos(\omega_0 t - \delta)$, σ, δ gegeben durch (3), (4), spezielle Lsg von (5').

Kontrolle: $\gamma = 0$ setzen $\Rightarrow$ $\sigma = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_u^2 - \omega_0^2}$ ✓ siehe VL 14

2. Allg. Lsg

$y(t) =$ spezielle Lsg. der inhomog. Gl. (5') $+$ allg. Lsg der homogenen Gl. (5)

$$= y_*(t) + A e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin \omega t + B e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos \omega t$$

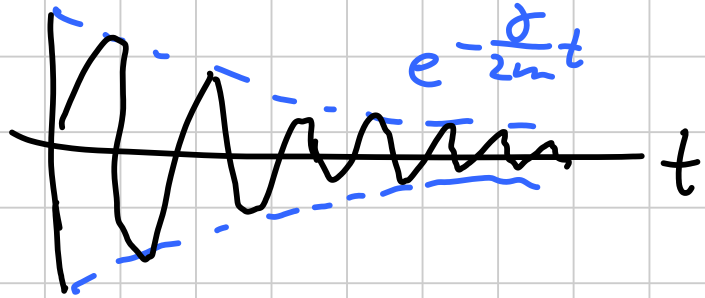
Ann. $D = \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{g}{m} < 0$

(Schwache Dämpfung)

$\omega = \sqrt{-D}$

Für große Zeiten geht die Lsg der homogenen Gl. gegen Null, egal wie A und B gewählt werden.

$e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cdot \sin(\omega t)$



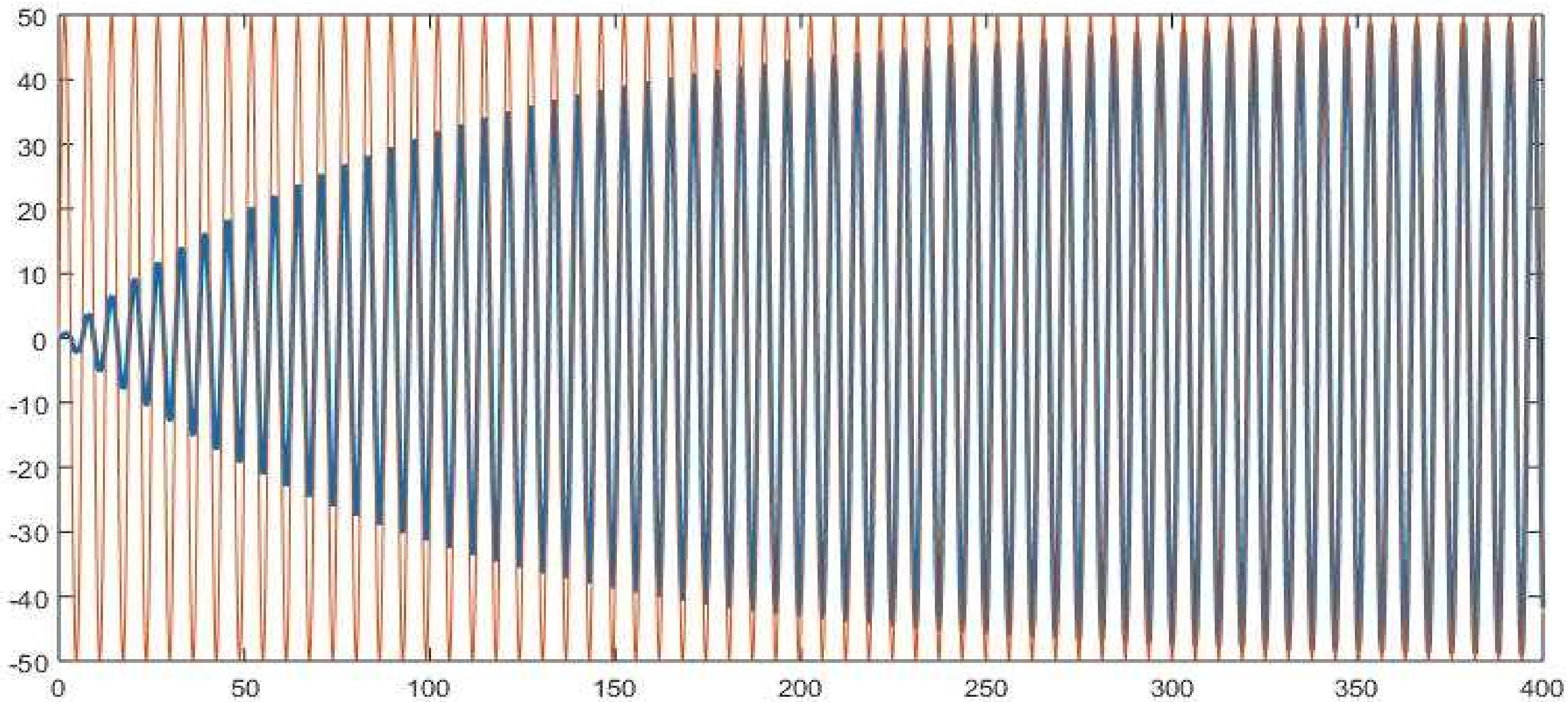
$\Rightarrow$!!! Für große Zeiten konvergiert jede Lsg gegen $\sigma \cos(\omega_0 t - \delta)$

3. Anfangsbed'en $y(0) = y'(0) = 0$ (Ruhelage)

$$0 = y(0) = \sigma\cos(-\delta) + B \Rightarrow B = -\sigma\cos(-\delta)$$

$$0 = y'(0) = -\omega_0\sigma\sin(-\delta) + \omega A - \frac{\gamma}{2m}B$$

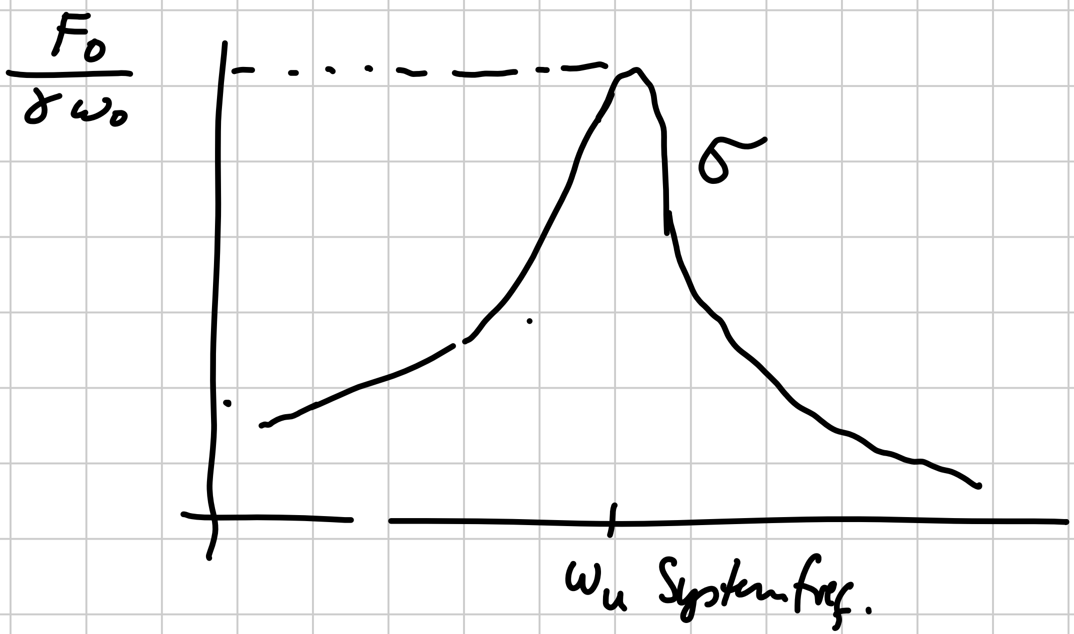
$$\Rightarrow \quad A = \frac{\sigma}{\omega}\left(\omega_0\sin(-\delta) + \frac{\gamma}{2m}\cos(-\delta)\right)$$



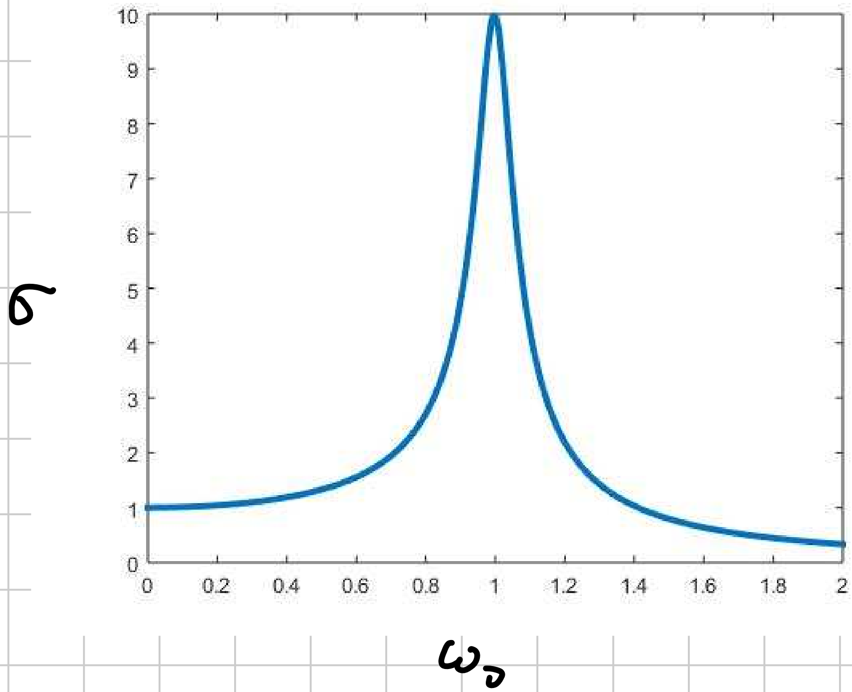
4. Maximale Auslenkung = ?

Resonanzkurve = Endauslenkung als Fkt. der Anregungsfrequenz ω_0

$$\dot{\sigma} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_u - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma \omega_0}{m}\right)^2}}$$



Je näher die Anreg. freq.
an der Systemfreq.,
desto größer die Auslenkung.



Resonanzkurve für

$m = k = F_0 = 1, \quad \gamma = 0.2$

$\omega_u = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$

§12 Nichtlineare Oszillationen

$y \cdot y \cdot y'$

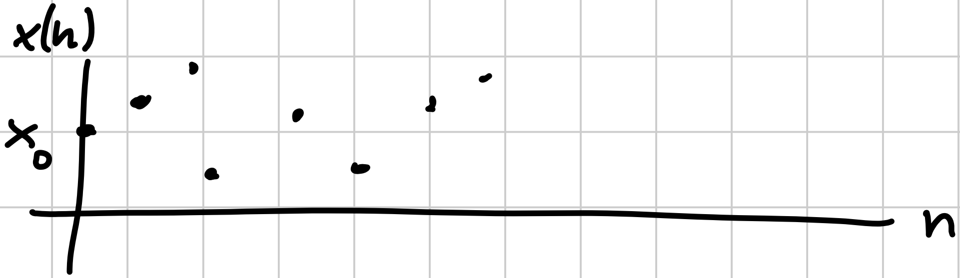
Bsp'e

1) $$y'' + \varepsilon(y^2 - 1)y' + y = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$\varepsilon > 0$, klein

Van der Pol-Gleichung
(Bsp. einer nichtlin. Schwingungsgl.)

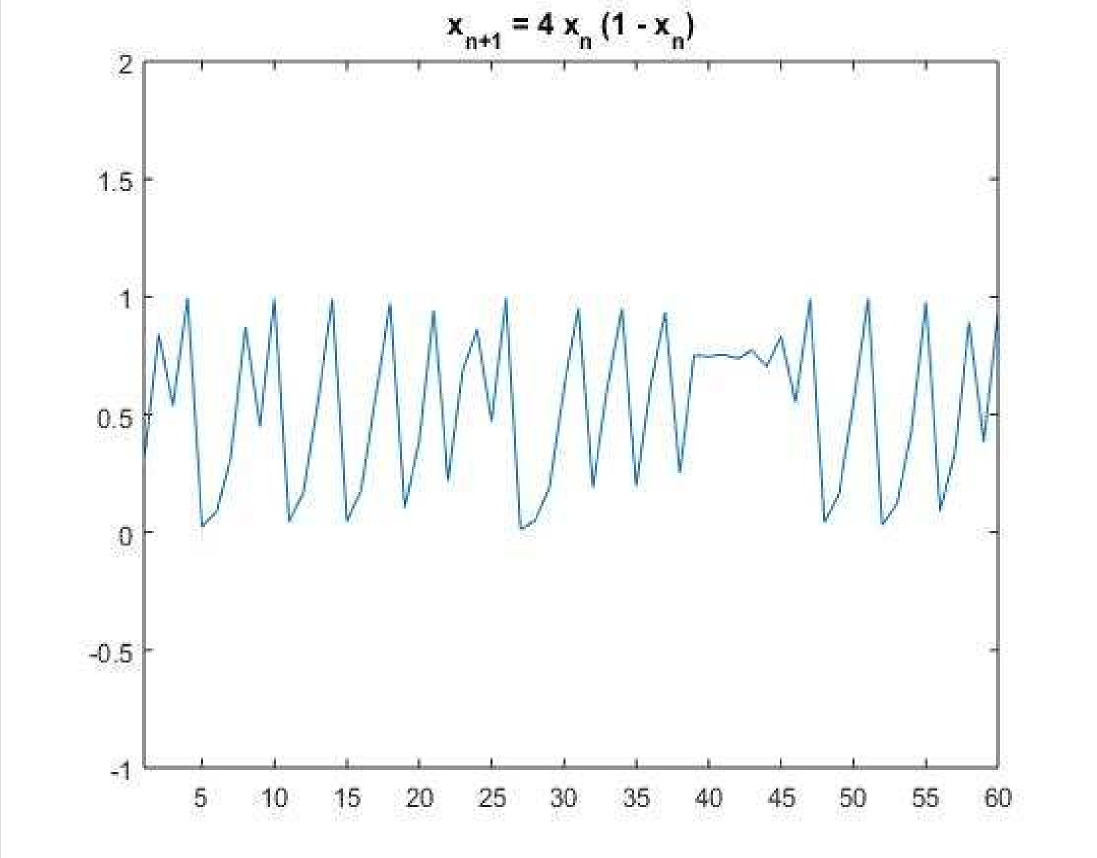
2) $$x(0) = x_0$$
$$x(n) = f(x(n-1)) = 4\, x(n-1) \cdot (1 - x(n-1))$$
(d.h. $f(z) = 4z(1-z)$)




Topographie

3) Wettermodelle (zB Temperatur als Fkt. der Zeit)

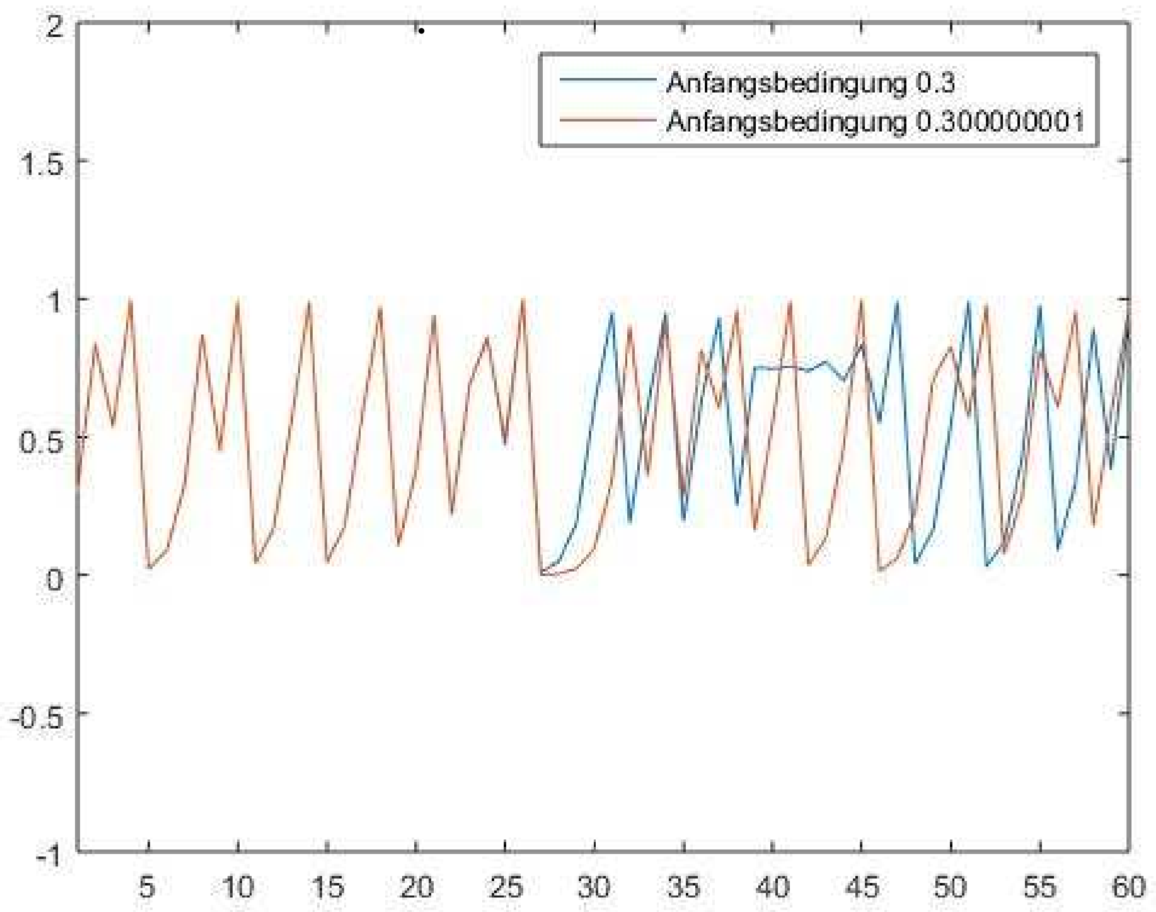
Lösung von 2) mit Anfangswert $x_0 = 0.3$



⚠ Neues Phänomen 1 : Unregelmäßige Oszillationen

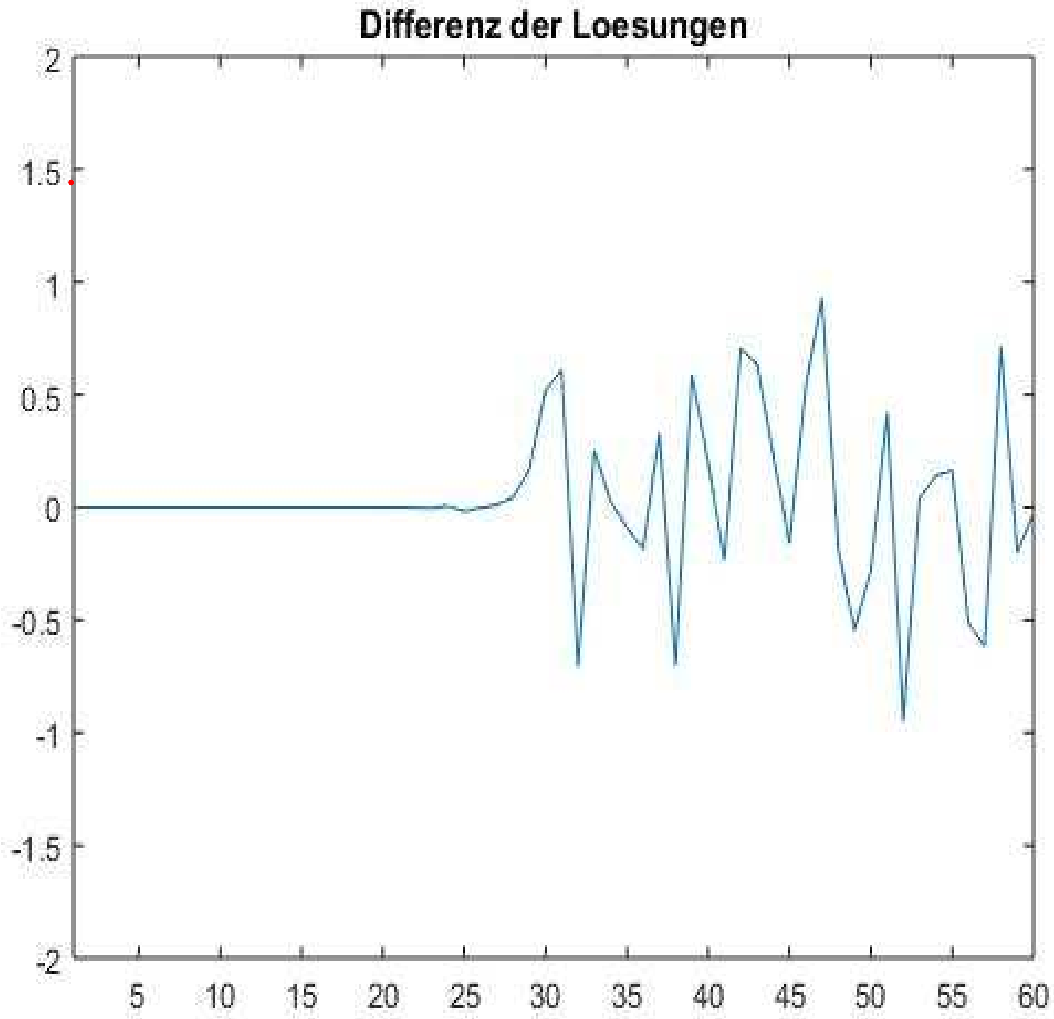
Fachbegriff: "Chaos"

2 Lösungen von 2), mit fast identischen Anfangswerten



⚠ Neues Phänomen 2: Extrem sensitive Abhängigkeit v. Anfangsbedingungen
→ Unvorhersagbarkeit der Lösung jenseits eines gewissen Zeithorizonts

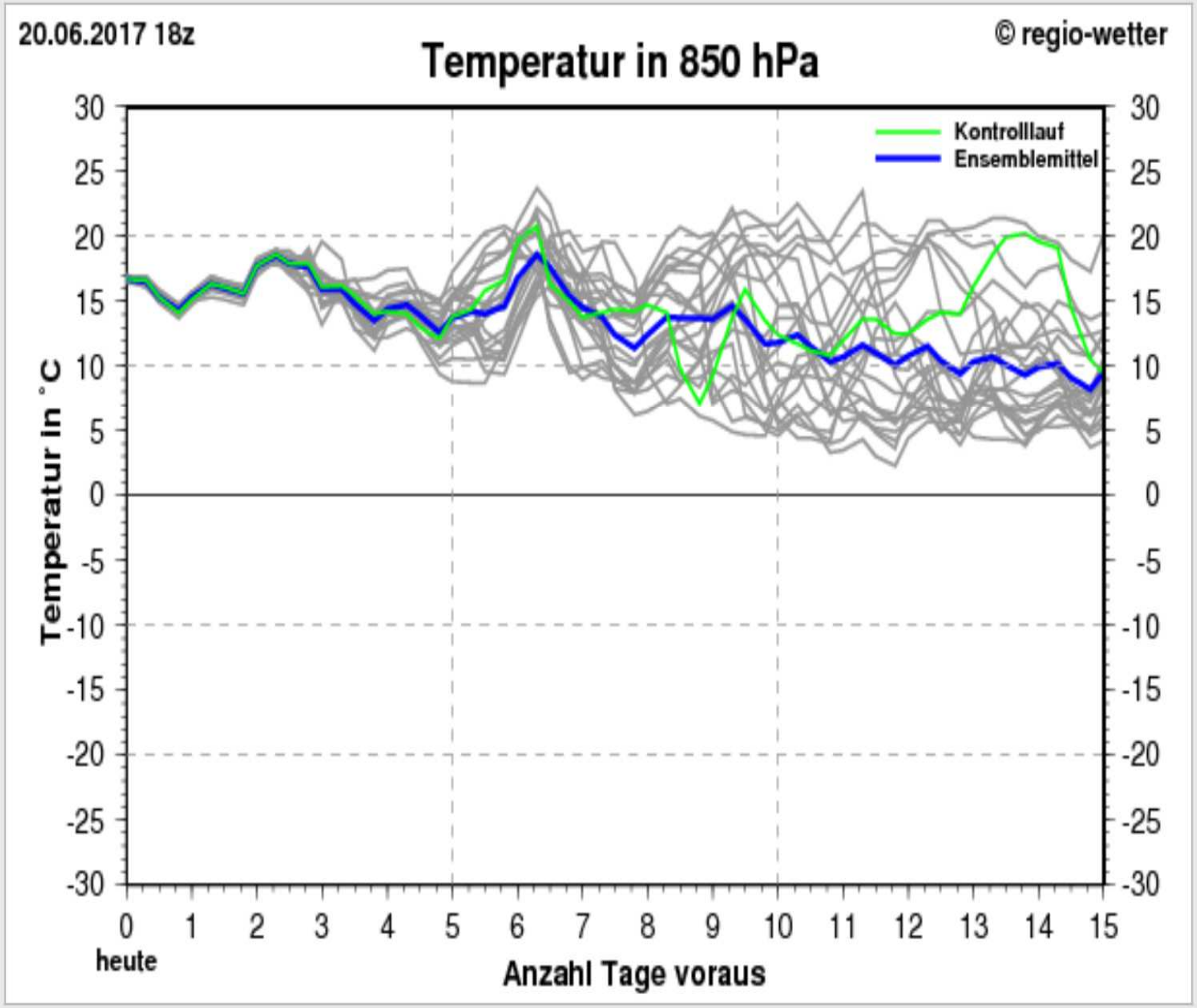
Fachbegriff: "Schmetterlingseffekt"
E.N. Lorenz 1972: "Does the flap of a butterfly's wings set off a tornado in Texas?"



Differenz der Loesungen
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60

München

GFS-Ensemble



www. regio - wetter . de

Obige Webseite berücksichtigt solche "Unvorhersag-
barkeitseffekte", und zeigt verschiedene Simulations-
ergebnisse bei jeweils leicht veränderten Anfangs-
bedingungen und Systemparametern. Die
grauen Kurven sind das Analogon zur blauen
u. orangefarbenen Kurve der vorletzten Seite.
Für ein paar Tage stimmen sie gut überein,
nach 15 Tagen schwanken die Vorhersagen zwischen
5° und 20° (!) [Temp. bei Druck = 850 hPa
entspricht Temp. in ca. 1500 m Höhe].

Mathestudium, 3./4. Jahr: Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme ⇝ Verständnis "chaotischen" Verhaltens; <u>statistische</u> Vorhersagen trotzdem möglich, z.B. "wahrscheinlichster" Verlauf, Unsicherheits-quantifizierung (uncertainty quantification)