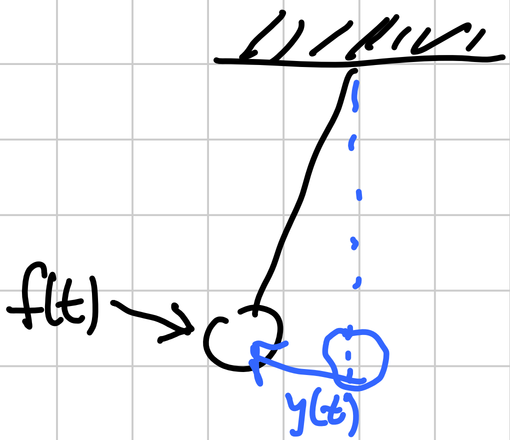
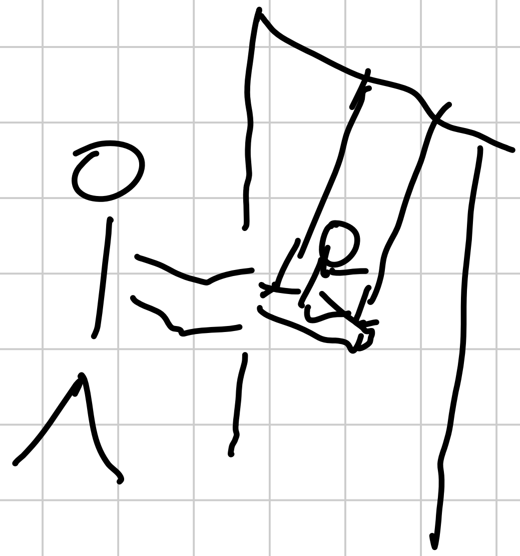
10.3 Erzwungene Schwingungen ohne Dämpfung

(S') $m y''(t) + \gamma y'(t) + k y(t) = f(t)$





äußere Kraft zur Zeit t

zentrales Bsp: $f(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$

(äußere Kraft periodisch in der Zeit)

Wettbewerb $\underbrace{\omega = \sqrt{-D}}_{\text{Systemfrequenz wenn } F_0 = 0} \hookrightarrow \underbrace{\omega_0}_{\text{Anregungsfrequenz}}$

Ann.: keine Dämpfung ($\gamma = 0$).

$$(S') \quad \boxed{m y'' + k y = F_0 \cos(\omega_0 t)} \;, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

(Anfangsbed.; Ruhelage)

Diese Gl. heißt <u>inhomogene Schwingungsgl.</u>

1. Spezielle Lsg
2. Allg. Lsg
3. Konstanten durch Anf. bed.

1. <u>Spezielle Lsg.</u>

Ansatz: $y(t) = \sigma \cdot \cos(\omega_0 t)$, σ Konstante

(denn dann alle 3 Terme in (S') von der Form Konstante $\cdot \cos(\omega_0 t)$)

Einsetzen in (S'):

$$m \cdot \sigma \cdot \left(-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)\right) + k \cdot \sigma \cdot \cos(\omega_0 t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\underset{\cdot \frac{1}{m}}{\Leftrightarrow} \quad \sigma \left(-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) + \omega^2 \cos(\omega_0 t) \right) = \frac{F_0}{m} \quad \text{—''—}$$

$$\omega = \sqrt{-D}, \quad D = \frac{\gamma^2}{2m} - \frac{k}{m} \underset{\text{hier}}{=} -\frac{k}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma \cdot (\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} \quad \Big| \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

Ergebnis: Also $\boxed{y_*(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)}$ Lsg von (S')

2. Allg. Lsg Benutze Superpositionsprinzip

y_* Lsg von (S') $\quad m y_*'' + \gamma y_*' + \xi y_* = F_0 \cos(\omega_0 t)$

(+) y Lsg von (S) $\quad m y'' + \gamma y' + \xi y = 0$

$$m(y_*'' + y'') + \gamma(y_*' + y') + \xi(y_* + y) = F_0 \cos(\omega_0 t) + 0$$

$$\parallel$$

$$m(y_* + y)'' + \gamma (y_* + y)' + \xi (y_* + y)$$

d.h. $y_* + y$ Lösung von (S').

Also:

$$\boxed{\text{Allg. Lösung der inhomogenen Gl. (S')} = \text{Spezielle Lsg. der inhomog. Gl. (S')} + \text{Allg. Lsg der homogenen Gl. (S)}}$$

Muß man sich beschaffen

Satz 10.1, VL 13

In Formeln: (für $\gamma = 0$)

$$y(t) = y_*(t) + A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

$$= \sigma\cos(\omega_0 t) + \text{———} \,//\, \text{———}$$

A, B Konstanten

3. Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow A, B$

$$0 = y(0) = \sigma \cdot 1 + A \cdot 0 + B \cdot 1$$

$$\Rightarrow \quad B = -\sigma = -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$y'(t) = -\omega_0 \cdot \sigma \cdot \sin(\omega_0 t) + A \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - B \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)$$

$$0 = y'(0) = -0 + A \cdot \omega \cdot 1 - 0$$

$$\Rightarrow A = 0$$

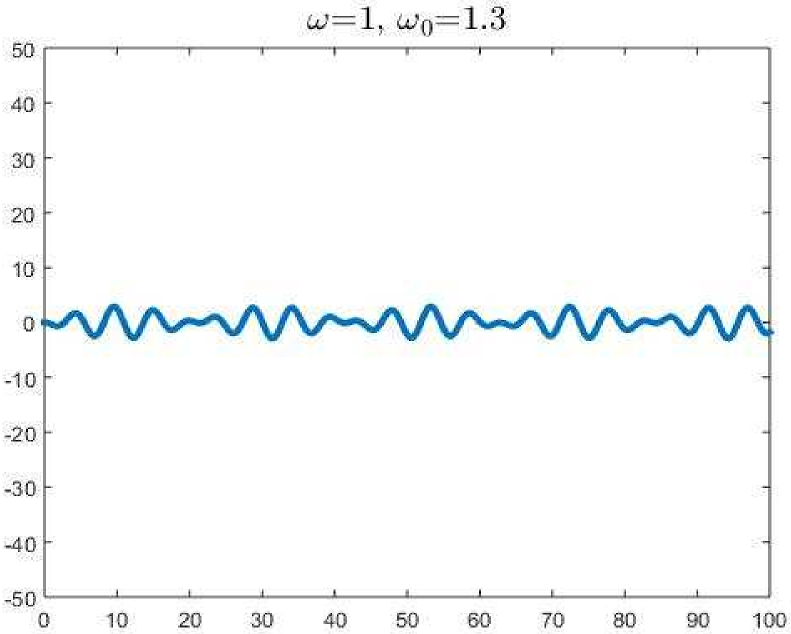
Einsetzen in allg. Lösung

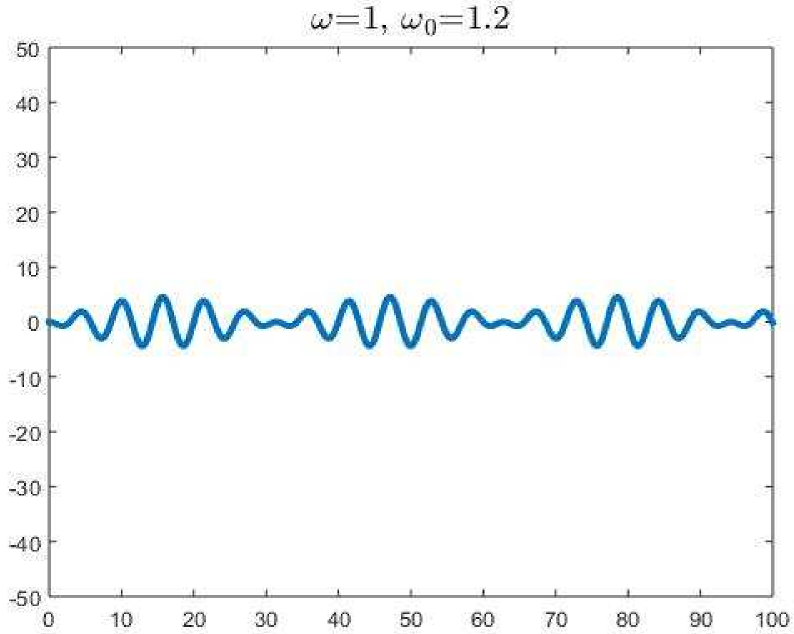
$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right)}$$

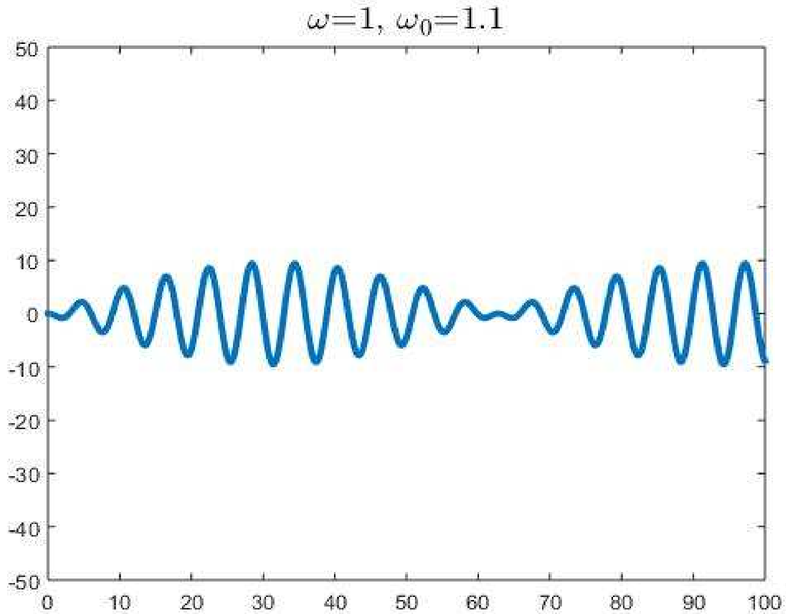
Differenz zweier Cosinus-Funktionen mit unterschiedlicher Frequenz

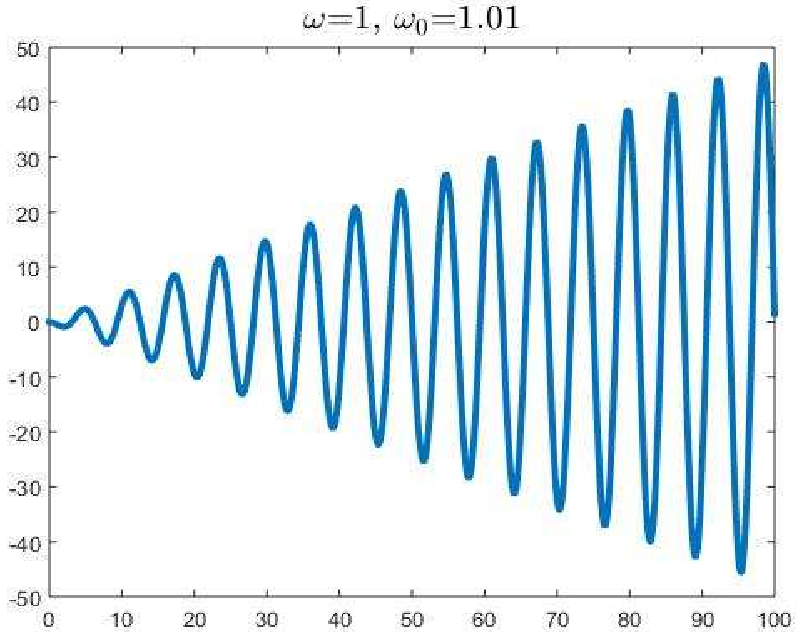
Wie sieht diese Funktion aus?

Setze $F_0 = m = \omega = 1$ und variiere die Anregungsfrequenz ω_0


$\omega=1,\ \omega_0=1.3$
50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


$\omega=1,\ \omega_0=1.2$
50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


$\omega=1,\ \omega_0=1.1$
50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100


$\omega=1,\ \omega_0=1.01$
50 40 30 20 10 0 -10 -20 -30 -40 -50
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

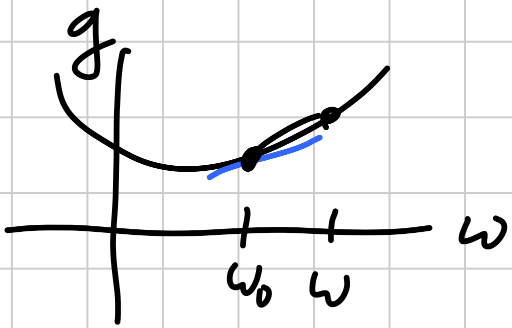
(MATLAB)-Plot:

Für $\omega_0 \approx \omega$ lineares unbeschränktes Wachstum der Amplitude mit der Zeit !!! Dieser spektakuläre Effekt heißt Resonanz

Wieso? In der Formel gibt es doch nur Cosinus-Funktionen, und die sind beschränkt . . .

Antwort: benutze 3. binom. Formel $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ für den Nenner:

$$y(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\omega+\omega_0} \underbrace{\frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}}_{\text{Differenzenquotient bzgl. } \omega}$$



Sei $g(\omega) := \cos(\omega t)$

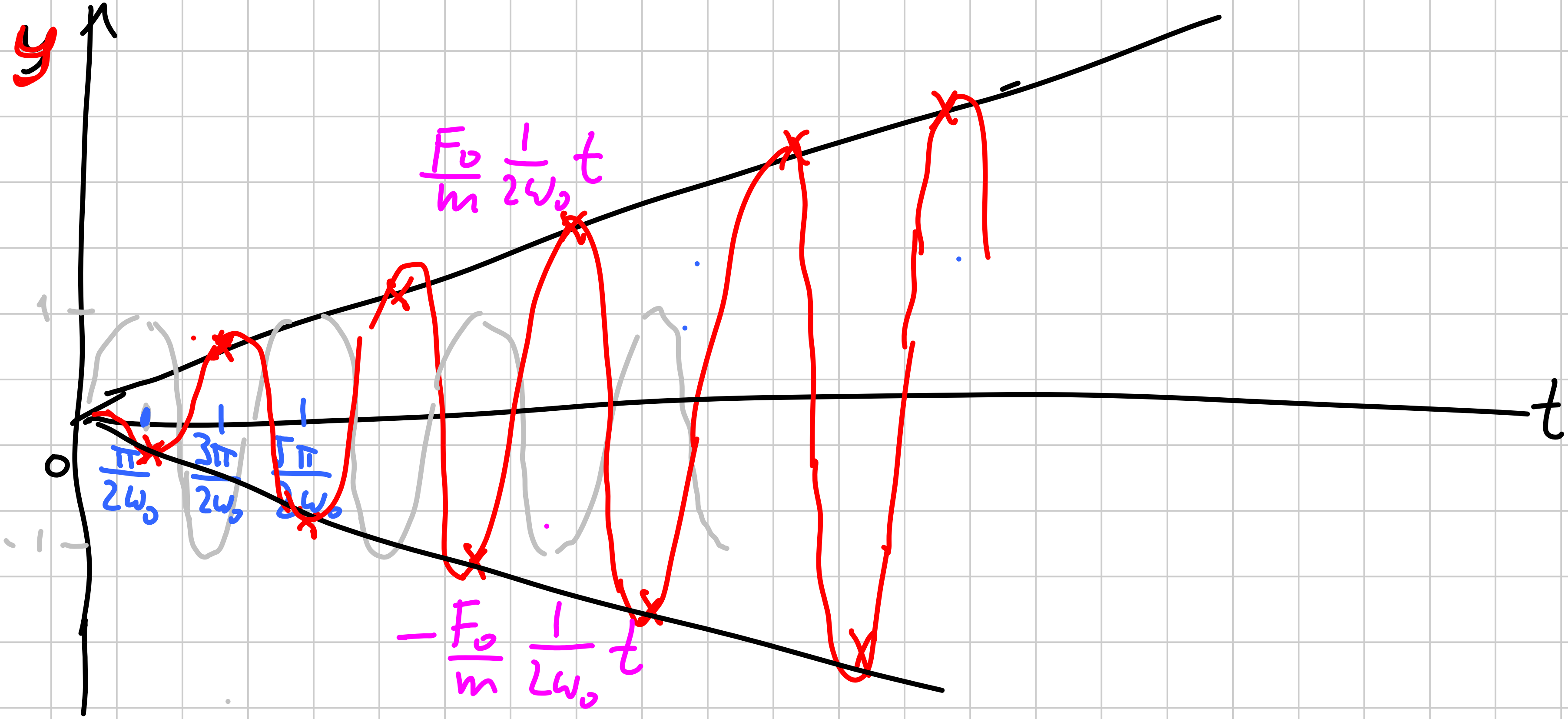
$$\text{Bruch} = \frac{g(\omega) - g(\omega_0)}{\omega - \omega_0}$$

konvergiert gegen $g'(\omega_0)$ wenn ω gegen ω_0

Hier $g'(\omega) = -t \cdot \sin(\omega t)$

$\Rightarrow g'(\omega_0) = -t \sin(\omega_0 t)$

$$\Rightarrow y(t) \text{ konv. gegen } \boxed{-\frac{F_0}{m} \underbrace{\frac{1}{2\omega_0} t}_{\text{wächst linear in } t} \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{periodisch}}}$$



Resonante Anregung $(\omega_0 = \omega)$ $\Rightarrow$ Schwingung mit Frequenz gleich Anregungsfrequenz, deren Amplitude linear mit der Zeit wächst !!!

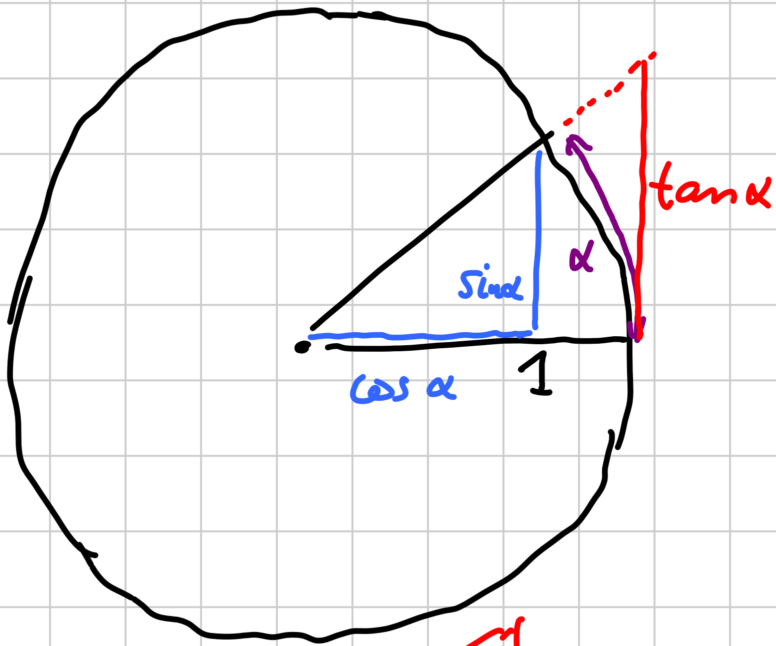
10.4 | Erzwungene Schwingung mit Dämpfung

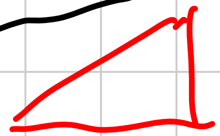
[0. Mathe]
1. Spezielle Lsg
2. Allg. Lsg
3. Konstanten aus Anf. Bed.

selbe Methode, aber man braucht mehr Wissen über sin und cos ☹

0.1 Mathe

1) Tangens und Arcustangens

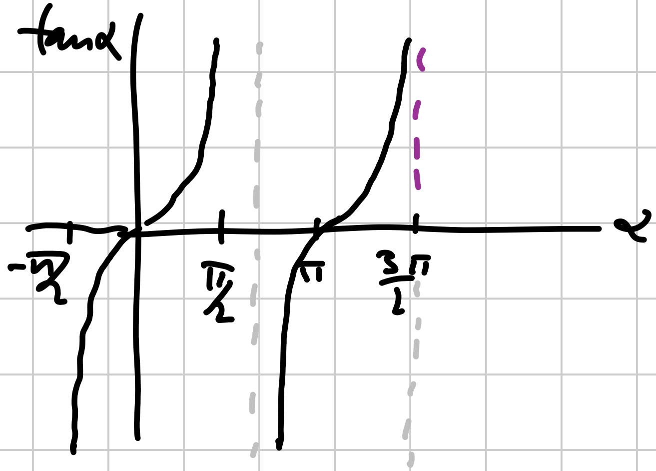


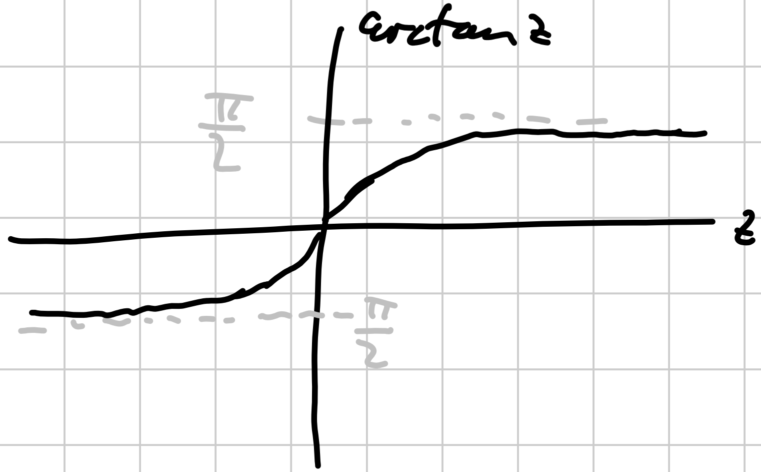
Dreiecke  und  ähnlich $\Rightarrow \dfrac{\tan\alpha}{1} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\tan\alpha$ = "Tangens von α"   von lat. tangere = berühren

Umkehrfkt: $\tan\alpha = z \Leftrightarrow \alpha = \arctan z$ "Arcustangens von z"

von lat. arcus = Bogen (also Arcus des Tangens
= Bogen(länge) der Berührenden)





2) Linearkombinationen von sin und cos

Hilfssatz 10.1 Seien A, B reelle Zahlen,

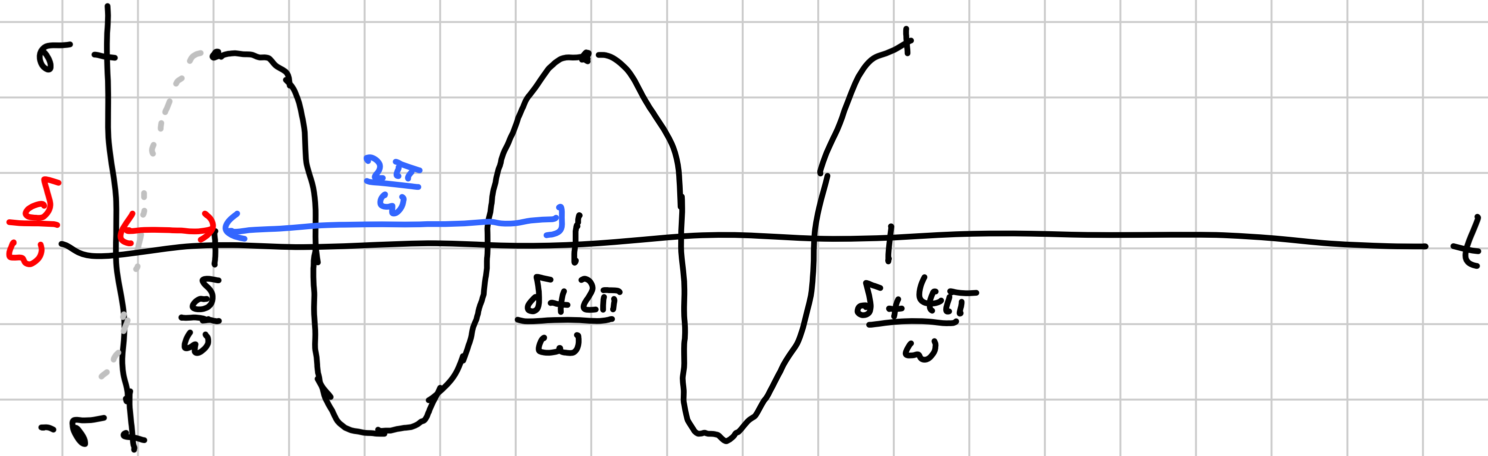
$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Dann:

$$x(t) = \sigma \cdot \cos(\omega t - \delta) \qquad (*)$$

mit $\sigma = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\delta = \arctan(B/A)$

"Amplitude" "Phasenverschiebung"



<u>Beweis</u> Additionstheoreme

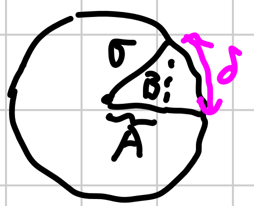
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

$\Rightarrow$ Rechte Seite von (*) $= \sigma \cos(\omega t) \cos\delta + \sigma \sin(\omega t) \sin\delta$

$\cos(\alpha - \beta)$ mit $\alpha = \omega t$, $\beta = \delta$

$$\overset{!}{=} A \cos(\omega t) + B \sin \omega t$$

$\Rightarrow$ $\sigma \cos\delta = A$, $\sigma \sin\delta = B$



$\Rightarrow$ siehe Skizze

$$\sigma = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\tan\delta = \frac{B}{A}$$