[noch §10 Schwingungsgleichungen]

## 10.2) Lösung im allgemeinen Fall

Wdh.: (S) $\quad m y'' + \gamma y' + k y = 0$

(C) $\quad \underset{= a}{m}\lambda^2 + \underset{= b}{\gamma}\lambda + \underset{= c}{k} = 0$, $\lambda$ Parameter

$m, k > 0$, $\gamma \geq 0$ gegeben

Hatten gesehen: manchmal ($m=k=1, \gamma=0$) sin, cos, manchmal $e^{\lambda t}$ mit $\lambda$ Lösung von (C). Im Allgemeinen: "Mischung" von e-Fkt. und sin, cos

**Satz 10.1** Sei $D$ die Diskriminante der char. Gl., d.h. $D = \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$.

Die allgemeine Lösung von (S) ist

a) $\quad e^{-\frac{\gamma}{2m}t}\left(A e^{\sqrt{D}\,t} + B e^{-\sqrt{D}\,t}\right)$ wenn $D > 0$

b) $\quad$ —"— $\left(A + Bt\right)$ wenn $D = 0$

c) $\quad \underbrace{\text{—"—}}_{\text{Dämpfung; } = 1 \text{ wenn } \gamma = 0} \underbrace{\left(A \sin(\sqrt{-D}\,t) + B \cos(\sqrt{-D}\,t)\right)}_{\text{Schwingung}}$ —"— $D < 0$.

wobei $A, B$ reelle Konstanten.

Bsp 1) $m = k = 1$, $\gamma = 0$ $\qquad D = 0 - \frac{1}{1} = -1 < 0$, d.h. Fall c)

$\sqrt{-D} = \sqrt{1} = 1$, $\quad -\frac{\gamma}{2m} = -\frac{0}{2\cdot 1} = 0 \Rightarrow$ Lsg ist

$$\underbrace{e^0}_{=1} \cdot (A \sin t + B \cos t)$$

$= 1$

**Bsp 2)** $y'' + 2y' + 5y = 0$

$m = 1 \qquad \gamma = 2 \qquad k = 5$

1. Char. Gl.: $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$

$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\underbrace{(1)^2 - 5}_{= -4 = D < 0}}$ ... keine Lsg!

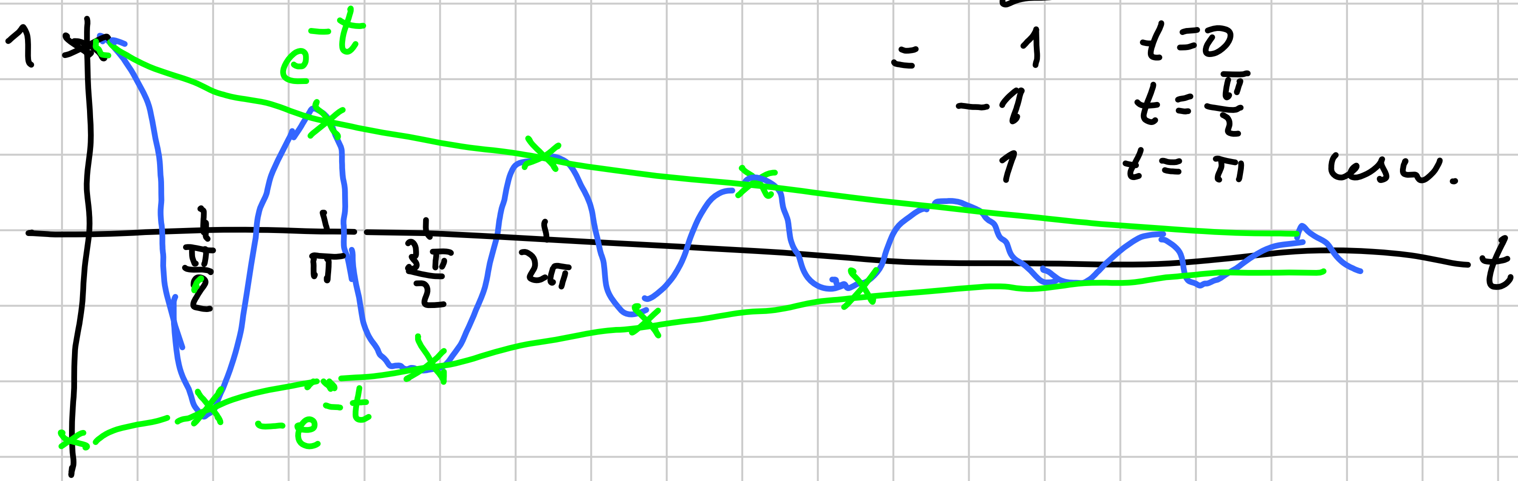
2. Also Fall c). $\sqrt{-D} = \sqrt{4} = 2$

$-\frac{\gamma}{2m} = -\frac{2}{2} = -1$

$y(t) = e^{-t}\left(A \cos 2t + B \sin 2t\right)$

z.B. $A = 1$, $B = 0$ $\quad y(t) = e^{-t} \cdot \underbrace{\cos 2t}$

$= \begin{cases} 1 & t = 0 \\ -1 & t = \frac{\pi}{2} \\ 1 & t = \pi \end{cases}$ usw.



"gedämpfte Schwingung" mit konstanter Frequenz und exponentiell abklingender Amplitude.

$A, B$ sind bestimmt durch Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$, $y'(0) = v_0$.

<u>Beweis von c).</u> (Wieso $\sqrt{-D}$ ???)

Reicht zu zeigen, daß
$$y_1(t) = e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\sqrt{-D}\,t),$$
$$y_2(t) = \text{—''—} \cos(\text{—''—})$$
Lösungen. Betrachte z.B. $y_1$. Benutze

- Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $(e^{at})' = a e^{at}$
- $\sin(at)' = \underbrace{a}_{} \cdot \cos(at)$, $\cos(at)' = -\underbrace{a}_{} \cdot \sin(at)$

innere Ableitung

$$y_1' = -\frac{\gamma}{2m} e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \sin(\sqrt{-D}\,t) + e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cdot \sqrt{-D} \cdot \cos(\sqrt{-D}\,t)$$

$$= -\frac{\gamma}{2m} y_1 + \sqrt{-D}\, y_2$$

$$y_2' = -\frac{\gamma}{2m} e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cos(\sqrt{-D}\,t) + e^{-\frac{\gamma}{2m}t} \cdot \sqrt{-D} \cdot (-\sin(\sqrt{-D}\,t))$$

$$= -\frac{\gamma}{2m} y_2 - \sqrt{-D}\, y_1$$

$$y_1'' = -\frac{\gamma}{2m}\left(-\frac{\gamma}{2m} y_1 + \sqrt{-D}\, y_2\right) + \sqrt{-D}\left(-\frac{\gamma}{2m} y_2 - \sqrt{-D}\, y_1\right)$$

$$= \left(\left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 + D\right) y_1 - \frac{\gamma}{m}\sqrt{D}\, y_2$$

Einsetzen in (S)

$$m y_1'' + \gamma y_1' + k y_1$$

$$= \left(\frac{\gamma^2}{4m} + mD\right) y_1 - \cancel{\gamma\sqrt{D}\, y_2}$$

$$-\frac{\gamma^2}{2m} y_1 + \cancel{\gamma\sqrt{-D}\, y_2} + k y_1$$

$$D = \frac{\gamma^2}{4m^2} - \frac{k}{m}$$

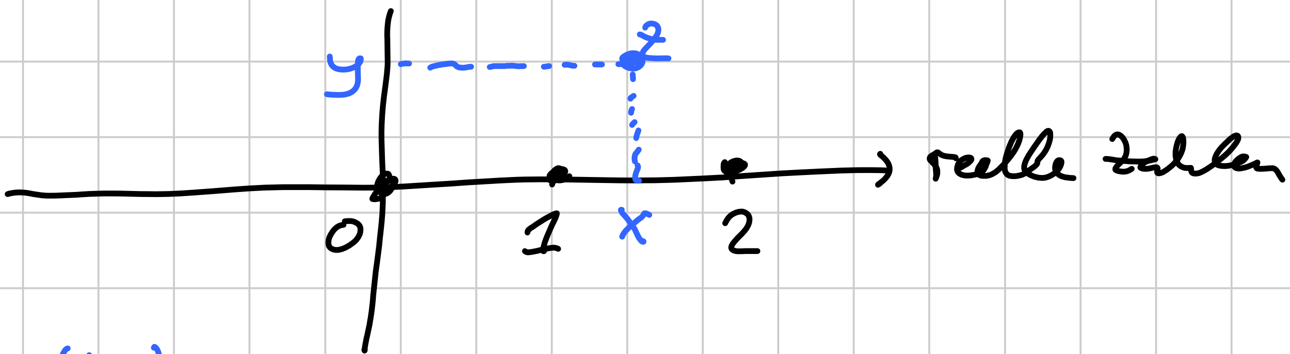
$$\Rightarrow mD = \frac{\gamma^2}{4m} - k$$

$$= y_1 \left( \frac{\gamma^2}{4m} + \underbrace{\left( \frac{\gamma^2}{4m} - \cancel{k} \right)}_{mD} - \frac{\gamma^2}{2m} + \cancel{k} \right)$$

$$= 0.$$

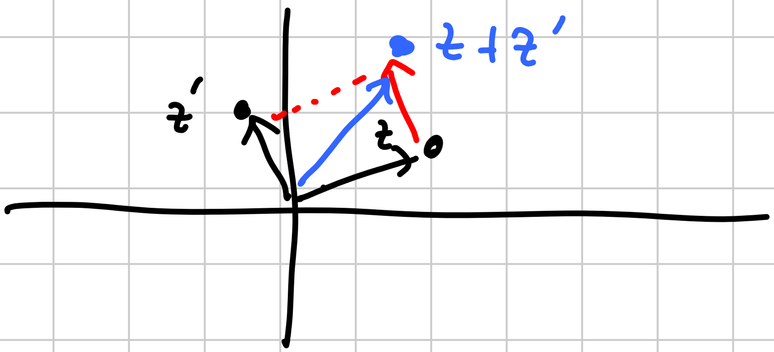
<u>Ausblick</u> Einheitliche Formulierung von a), b), c) im Mathe-/Physik-/Ingenieurstudium, $\simeq$ 2. Sem. Benutze <u>komplexe Zahlen</u>.

Komplexe Zahl = Vektor in 2D

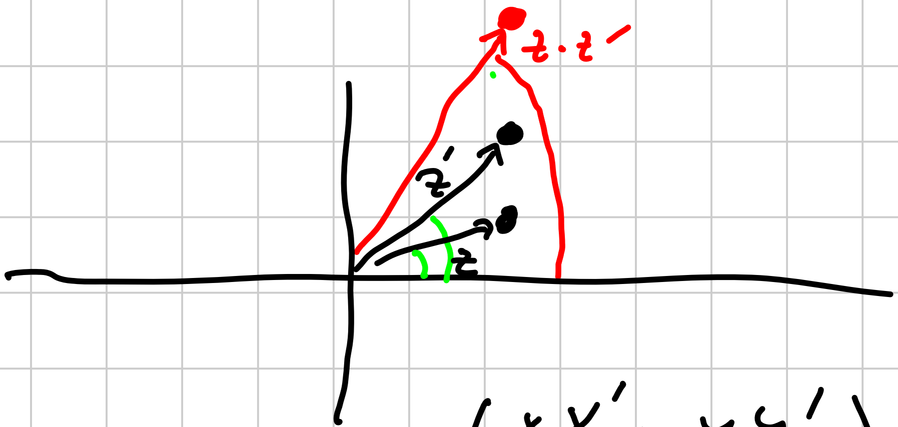



$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\quad x, y$ reelle Zahlen

$z + z' = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ komponentenweise Addition




$z \cdot z'$ = Vektor mit Länge = Produkt der Längen von $z, z'$ und Winkel zur $x$-Achse = Summe der Winkel



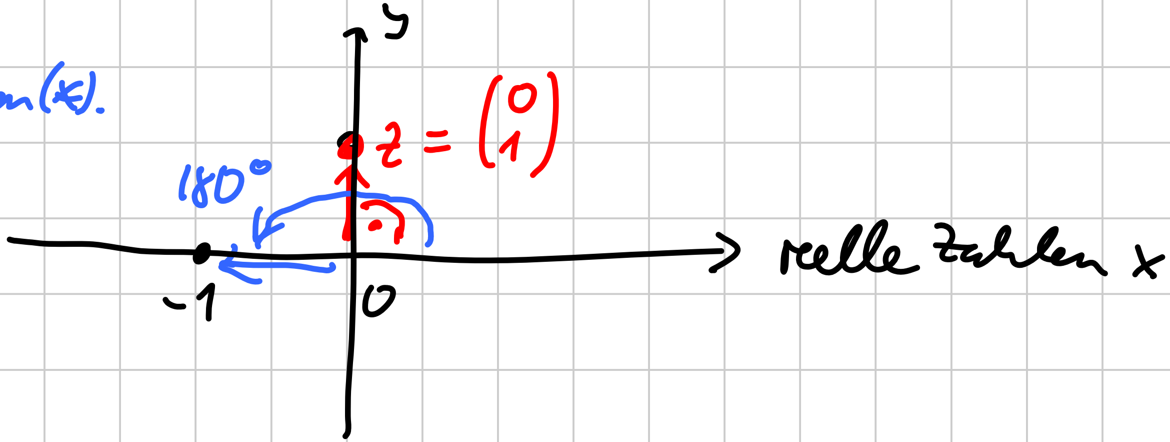

$$\left(\text{Formel: } z \cdot z' = \begin{pmatrix} xx' - yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}\right)$$

Tatsache: Quadratische Gleichungen immer lösbar!!

z.B. $\underbrace{z^2}_{= z \cdot z} = -1 \qquad (*)$

neue Multiplikationsregel

Beh.: $z = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist Lsg von (*).




Beweis: $z \cdot z$ = Vektor der Länge $1 \cdot 1$ mit Winkel zur x-Achse
$90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

= reelle Zahl $= -1$ (siehe Skizze)

Name: $z = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ heißt $i$ ("imaginäre Einheit")

Lösungsformel für quadratische Gl'en:

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad a, b, c \text{ reell}$$

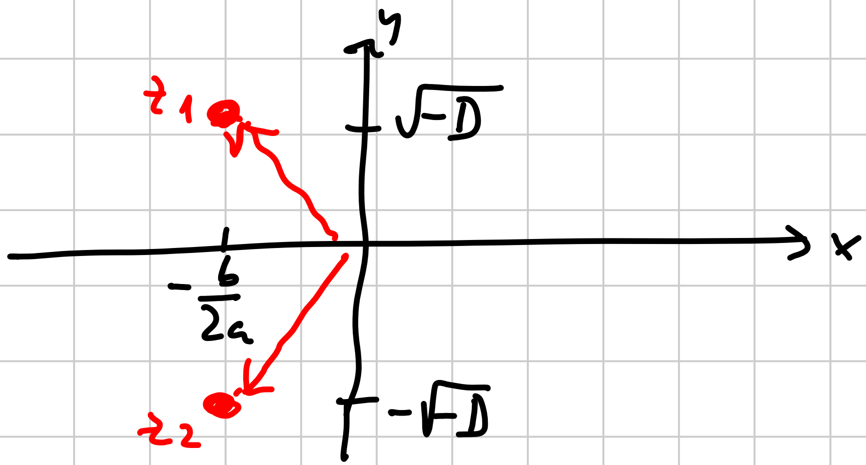
$$z_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}_{=D}}$$

Falls $D \geq 0$: übliche Lösungsformel, $z_{1/2}$ sind reelle Zahlen

$D < 0$: $\sqrt{D} = \sqrt{\underbrace{(-D)}_{\text{reell}, > 0} \cdot (-1)}$

$= \sqrt{-D} \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_{= \binom{0}{1} = i}$

$\Rightarrow \boxed{z_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm i \cdot \sqrt{-D}}$ komplexe Zahl




Theorie für (S): $\lambda_1, \lambda_2$ Lösungen v. (C)

$\lambda_{1,2}$ reell wenn $D > 0$, komplex wenn $D < 0$

Tatsache: Allg. Lsg von (S) wenn $D \neq 0$: $A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

☹ Dies scheint auf den ersten Blick der Lösung aus Satz 10.1 zu wiedersprechen.

<u>Aber:</u> Wenn $\lambda_1 = x_1 + i y_1$, $\lambda_2 = x_1 - i y_1$ komplex:

zur Person siehe VL 11

Euler: $e^{iy} = \cos y + i \sin y$
für y reell

Magie

Potenzgesetz $e^{z+z'} = e^{z} \cdot e^{z'}$ gilt auch für komplexe Zahlen. Also

$$e^{\lambda_1 t} = e^{x_1 t} \cdot e^{i y_1 t}$$
$$= e^{x_1 t} \left( \cos y_1 t + i \sin y_1 t \right)$$

D.h. das Produkt einer reellen Exponentialfkt. mit einem Sinus bzw. Cosinus ist eine komplexe Exponentialfkt! ☺

Endergebnis: Allg. Lösung von (S) in Fall a) <u>und</u> Fall c) ist

$$\tilde{A}\, e^{\lambda_1 t} + \tilde{B}\, e^{\lambda_2 t} \quad , \ \lambda_1, \lambda_2 \text{ Lösungen von (C)},$$

$\tilde{A}, \tilde{B}$ Konstanten (einheitliche Beschreibung via komplexe Zahlen)