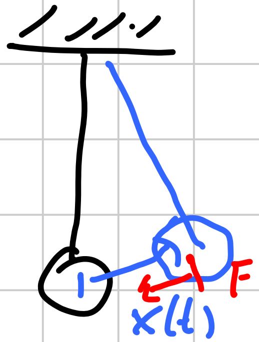
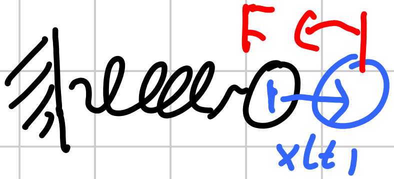
§10 Schwingungsgleichungen

Physikalisch

Modell für Schwingungen





Mathematisch

Differentialgleichungen 2. Ordnung, d.h. es kommen 2. Ableitungen vor

$x(t)$	Auslenkung eines Teilchens zur Zeit t	Unbekannte Fkt., die die Dgl. löst
$x'(t)$	Geschwindigkeit —"—	1. Ableitung der Fkt
$x''(t)$	Beschleunigung —"—	2. —"—

Gesetz: Masse · Beschleunigung = Summe einwirkender Kräfte F

(Newton II)

$$m \cdot x''(t) = F(x(t), x'(t))$$

(Diff.gleichung 2. Ordnung)

Kräfte:
- rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung
- Reibungskraft

$$F = -k \cdot x(t) - \gamma \cdot x'(t)$$

Die Differentialgleichung

(5) $$\boxed{m x''(t) + \gamma x'(t) + k x(t) = 0 \quad , m>0, \gamma \geq 0, k \geq 0}$$

heißt <u>lineare Schwingungsgleichung.</u>

—

Wichtiges Phänomen, das bei Dgl'en 1. Ordnung. ($\to$ §7) nicht auf= tritt: <u>Oszillationen</u>

<u>Beispiel</u> $m=1, \gamma=0, k=1$

$$(*) \qquad x''(t) + x(t) = 0$$

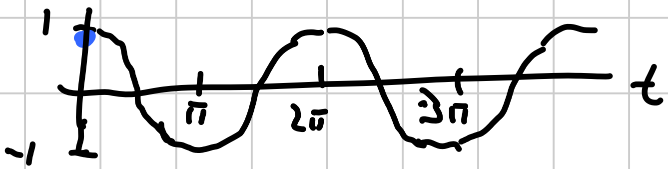
$$\Leftrightarrow \quad x''(t) = -x(t)$$

Erinnerung: Ableitungsregeln für sin und cos: $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$

$\Rightarrow \quad \sin'' = \cos' = -\sin, \qquad \cos'' = (-\sin)' = -\cos$

2 spezielle Lösungen von (*): $x_1(t) = \sin t$

$x_2(t) = \cos t$



Weitere Lösungen: A, B Konstanten $\Rightarrow$

$$x(t) = A \cdot \sin t + B \cdot \cos t \qquad (**)$$

denn $x''(t) = A \cdot \cos'(t) + B \cdot (-\sin'(t))$

$$= -A \sin(t) - B \cos(t) = -x(t)$$

Physikalische Interpretation der Konstanten:

$$x(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = \boxed{B = \text{Anfangsauslenkung}}$$

$$x'(t) = A \cdot \cos t - B \cdot \sin t$$

$$x'(0) = A \cdot 1 - B \cdot 0 = \boxed{A = \text{Anfangsgeschwindigkeit}}$$

Erwartung (math. Bew. später)

(**) ist die vollständige Liste <u>aller</u> Lösungen von (*), bzw. die sogenannte "<u>allgemeine Lösung</u>" von (*)

Verallgemeinerung der Konstruktion von $x(t)$ auf (S):

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Wenn } x_1(t),\ x_2(t) \text{ Lösungen von (S), } A, B \text{ Konstanten} \\ \Rightarrow\ \underbrace{A x_1(t) + B x_2(t)}_{\text{"Linearkombination" von } x_1(t) \text{ und } x_2(t)} \text{ Lösung von (S)}\end{array}}$$

(lineare Funktion von x_1 und x_2)

(Nachrechnen → Lösungen).

10.1 Lösungsmethode, Teil 1 (Starke Dämpfung)

Ziel: (S) $m y'' + \gamma y' + k y = 0$ lösen

Schritt 1 Charakteristische Gleichung aufstellen

Ersetze $y'' \rightsquigarrow \lambda^2$ λ Parameter

$y' \rightsquigarrow \lambda \; (= \lambda^1)$

$y \rightsquigarrow 1 \; (= \lambda^0)$

(C) $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$ (Charakteristische Gl.)

⚠ quadratische Gl. statt Diff.gl., also viel einfacher

Schritt 2 Diskriminante bestimmen

Dis. von $ax^2 + bx + c = 0$: $D = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$

Dis. von (C): $D = \left(\frac{\gamma}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$

Schritt 3 a) $D > 0$ (starke Dämpfung)

b) $D = 0$ (kritische Dämpfung)

c) $D<0$ (schwache —"—) [$y''=-y \leadsto D=-1$]

3a: Lösungen von (C): $\lambda_1 = -\frac{\gamma}{2m} + \sqrt{D}$

$\lambda_2 = -\frac{\gamma}{2m} - \sqrt{D}$

[Lsg von $ax^2+bx+c=0$: $x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$]

Allg. Lösung von (S): $\boxed{x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}}$

(A, B Konstanten)

<u>Bsp</u> $y'' + 3y' + 2y = 0$

<u>Schritt 1</u> Charakteristische Gl.: $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

<u>Schritt 2</u> Diskriminante: $D = \left(\frac{3}{2\cdot 1}\right)^2 - \frac{2}{1} = \frac{9}{4} - \frac{8}{4} = \frac{1}{4} > 0$

<u>Schritt 3</u> Lsg der char. Gl.:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}}_{= \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}} = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$$

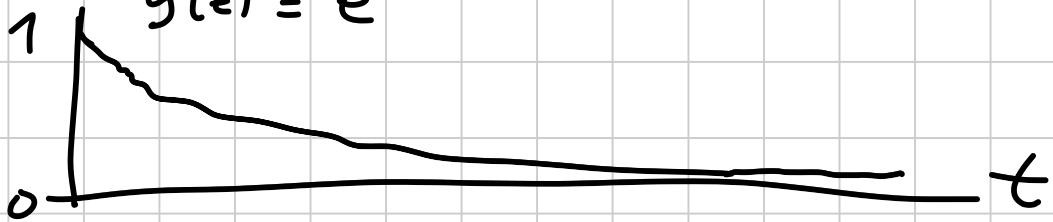
$$\lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = -2$$

Lösung der Diff.gleichung: $y(t) = A \cdot e^{-t} + B \cdot e^{-2t}$

$A = 1,\ B = 0$

$y(t) = e^{-t}$

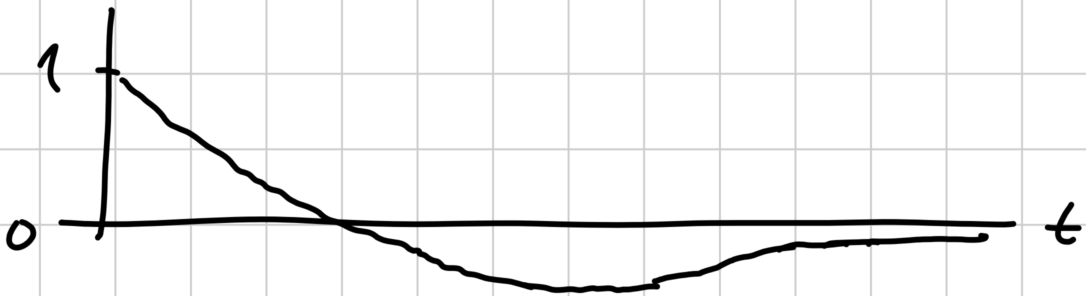
Löffel in Honig



$A = -1,\ B = 2$

$y(t) = -e^{-t} + 2\,e^{-2t}$

Löffel in Honig, hinreichend stark angeschubst



Beweis der Lösungsmethode (durch Einsetzen der Lsg. in (S))

$$y(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ Lsg'en von } (C)$$

Nebenrechnung: $y'(t) = \lambda_1 \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot B \cdot e^{\lambda_2 t}$

$$y''(t) = \lambda_1^2 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B e^{\lambda_2 t}$$

Einsetzen in (S):

$$m \cdot y''(t) + \gamma \cdot y'(t) + k \cdot y(t)$$

$$= m \cdot \left(\lambda_1^2 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 B e^{\lambda_2 t} \right) + \gamma \cdot \left(\lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 B e^{\lambda_2 t} \right) + k \cdot \left(A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t} \right)$$

$$= \underbrace{\left(m\lambda_1^2 + \gamma\lambda_1 + k \right)}_{=0,\ \text{da } \lambda_1 \text{ Lösung von } (C)} \cdot A \cdot e^{\lambda_1 t} + \underbrace{\left(m\lambda_2^2 + \gamma\lambda_2 + k \right)}_{=0,\ \text{da } \lambda_2 \text{ Lösung von } (C).} B e^{\lambda_2 t}$$

$m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$

$$= 0.$$