

Mathematik, Studium MINT (MA 8802)**Tutorübung** (03.7.2017-07.7.2017)**T 9.1. (Numerische Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung)** Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}x''(t) &= -\pi^2 \sin(\pi t), \quad t \in (0, 2) \\ x(0) &= x(2) = 0.\end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie, dass $x(t) = \sin(\pi t)$ eine exakte Lösung dieses Problems ist. Diskutieren Sie diese Lösung im Zusammenhang mit der speziellen Lösung für erzwungene Schwingungen mit vernachlässigter kleiner Dämpfung, d.h. $\gamma = 0$ aus Vorlesung 15.
- (b) Diskretisieren Sie das Intervall $(0, 2)$ durch 5 Punkte. Wie lautet die Schrittweite h ? Stellen Sie mit dem symmetrischen Euler-Verfahren aus der Vorlesung 16 die rekursive Formel für die diskrete Lösung x_i an den inneren Gitterpunkten $t_i = h \cdot i$, $i = 1, 2, 3$ auf. Wie lautet die diskrete Lösung am Rand, d.h. $x(t_0)$ und $x(t_4)$?
- (c) Stellen Sie das zugehörige Gleichungssystem auf.

T 9.2. (Eindimensionale Poissongleichung) Betrachten Sie die eindimensionale Poissongleichung

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (a, b) \tag{1}$$

mit der Neumann Randbedingung $u'(a) = r_1$ und der Dirichlet Randbedingung $u(b) = r_2$ für vorgegebene Werte r_1 und r_2 .

- (a) Diskretisieren Sie das Intervall (a, b) durch $n + 1$ Punkte und stellen Sie analog zur Aufgabe **T 9.1** das Gleichungssystem für die diskrete Lösung u_i an den inneren Gitterpunkten x_i auf.
- (b) Geben Sie an, wie sich das Gleichungssystem durch Hinzunahme der Dirichlet Randbedingung $u(b) = r_2$ verändert.
- (c) Betrachten Sie jetzt die Neumann Randbedingung $u'(a) = r_1$. Für die Approximation der ersten Ableitung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Verwenden Sie z. B.
- (i) den Vorwärtsdifferenzenquotienten aus der Vorlesung 16

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \quad \text{und}$$

Bitte wenden!

(ii) den symmetrischen Differenzenquotienten

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

Wie ändert sich das Gleichungssystem aus (a) in den Fälle (i)-(ii)?
Was fällt Ihnen im zweiten Fall auf? Erläutern Sie die Unterschiede.

T 9.3. (Hausaufgabe, Programmieren mit MATLAB)

Diskretisieren Sie das Anfangswertproblem aus T 9.1 mit dem symmetrischen Euler-Verfahren auf einem Gitter der Schrittweite h . Schreiben Sie ein MATLAB- Programm, dass diese diskrete Lösung findet. Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit der exakten Lösung $x(t) = \sin(\pi t)$. Dazu wählen Sie verschiedene Schrittweiten. Verkleinern oder vergrößern Sie sie. Was fällt Ihnen auf?

Hinweis: Benutzen Sie den MATLAB-Befehl $x=A \setminus b$, der das Gleichungssystem $Ax=b$ löst.

Aktuelle Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie auf der Vorlesungsseite

<http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/MINT17>