PROF. DR. GERO FRIESECKE
DR. NINA OVCHAROVA

Mathematik, Studium MINT (MA 8802)

Tutorübung (12.6.2017-16.6.2017)

T 7.1. (**Schwingungsgleichung**)
Es seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der Schwingungsgleichung

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0, \quad m > 0,\ \gamma \geq 0,\ k \geq 0. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ für beliebige reele Konstanten A und B ebenfalls eine Lösung von (1) ist.

T 7.2. (**Lösen von Schwingungsgleichungen mit starker Dämpfung**)

(a) Bestimmen Sie mittels der Methode der charakteristischen Gleichung aus der Vorlesung zwei Lösungen $y_1(t)$ and $y_2(t)$ der Differentialgleichung

$$y''(t) + 6y'(t) + 5y(t) = 0. \tag{2}$$

(b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $y(t) = Ay_1(t) + By_2(t)$ für beliebige reelle Konstanten A und B ebenfalls eine Lösung von (2) ist. Bestimmen Sie eine Lösung $y(t)$ von (2), die die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = -5$ erfüllt.

(c) Skizzieren Sie die Lösungsfunktion $y(t)$ aus (b).

T 7.3. (**Umwandlung Differentialgleichung 2. Ordnung in DGL-System 1. Ordnung**)
Betrachten Sie den gedämpften Oszillator

$$q''(t) = -\gamma q'(t) - kq(t), \quad q(0) = q_0,\ q'(0) = p_0. \tag{3}$$

(a) Transformieren Sie (3) mittels $q' = p$ auf ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung, d.h. in der Form $\begin{pmatrix} q' \\ p' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$. Wie lauten jetzt die Anfangsbedingungen?

(b) Eraten Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems aus (a) für $\gamma = 0$, $k = 1$, $q_0 = 1$ und $p_0 = 0$. Wie lautet die Lösung der ersprechenden Differentialgleichung 2. Ordnung?

T 7.4. (**Zusatzaufgabe, Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertswertproblems**)
Betrachten Sie erneut die Schwingungsgleichung

$$mx''(t) + \gamma x'(t) + kx(t) = 0, \quad m, \gamma, k > 0$$

Bitte wenden!

mit beliebigen Anfangsbedingungen

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0.$$

Zeigen Sie, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems eindeutig ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Differenz $z(t) = y_1(t) - y_2((t)$ zweier Lösungen y_1 und y_2 des obigen Anfangswertproblems. Bestimmen Sie $z(0)$ und $z'(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$E(t) := \frac{m}{2} z'(t)^2 + \frac{k}{2} z(t)^2$$

monoton fallend ist, d.h. $E'(t) \leq 0$ für alle t. Beachten Sie, dass $E(t) \geq 0$ für alle t.

Aktuelle Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie auf der Vorlesungsseite

`http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/MINT17`