PROF. DR. GERO FRIESECKE
DR. NINA OVCHAROVA

SOSE 2017
BLATT 6

Mathematik, Studium MINT (MA 8802)

Tutorübung (6.6.2017-9.6.2017)

T 6.1. Bestimmen Sie alle Funktionen $y(t)$, die folgende Differentialgleichungen erfüllen

(a) $ay' = 0,\ a \in \mathbb{R}$;

(b) $ay'' = 0,\ a \in \mathbb{R}$.

T 6.2. (**Enzymkinetik**) Betrachten Sie das folgende System miteinander gekoppelter Differentialgleichungen aus der Enzymkinetik für die vier Konzentrationen $[E], [S], [ES]$ und $[P]$ (siehe VL 11):

$$\frac{d}{dt}[E] = -k_1[E]\,[S] + k_{-1}[ES] + k_2[ES] \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}[S] = -k_1[E]\,[S] + k_{-1}[ES] \tag{2}$$

$$\frac{d}{dt}[ES] = k_1[E]\,[S] - (k_{-1} + k_2)[ES] \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}[P] = k_2[ES]. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Summe der Konzentrationen $[E]$ des Enzyms und $[ES]$ des Enzym-Substrat-Komplexes sich im Laufe der Zeit nicht ändert, d.h. $[E](t) + [ES](t) = const$.

(b) Durch Elimination von $[E]$ in Gleichungen (2) - (3) bestimmen Sie das Differentialgleichungssystem für $[S]$ und $[ES]$. Wie kann man aus diesen beiden Grössen Produkt- und Enzymkonzentration ermitteln?

(c) Zeigen Sie, dass

$$[S](t) + [ES](t) + [P](t) = const.$$

T 6.3. (**Numerisches Verfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung, Explizites-Euler Verfahren**) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = -y^2, \quad y(0) = 1.$$

(a) Bestimmen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren die ersten vier Schritte $y_h(t_1)$, $y_h(t_2)$, $y_h(t_3)$, $y_h(t_4)$ zur Schrittweite $h = 0.5$. Vergleichen Sie diese Werte mit den Werten der entsprechenden exakten Lösung. Skizzieren Sie die beiden Lösungen.

Bitte wenden!

T 6.4. (Explizites-Euler Verfahren für Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y_1' &= y2 \\ y_2' &= -y_1 \end{aligned}$$

mit $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 1$, d.h. $y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren eine Näherung $y^{(h)}(t_4)$ an die exakte Lösung $y(t_4) = \begin{pmatrix} y_1(t_4) \\ y_2(t_4) \end{pmatrix}$ für die Schrittweite $h = 0.5$, also $t_4 = 2$. Dabei geben Sie die ersten vier Schritte des Verfahrens explizit an. Stellen Sie die berechnete Näherungswerte $y^{(h)}(t_4)$ als Matrix dar (siehe VL 11, Teil b).

(b) Fertigen Sie, wie in der VL 11, eine Skizze mit der numerischen Lösung an.

(c) (**freiwillig, schwieriger**) Eraten Sie anhand der Ableitungstabelle aus VL 6 die exakte Lösung $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ des Anfangswertproblems.

Aktuelle Informationen und Materialien zur Vorlesung finden Sie auf der Vorlesungsseite

`http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/MINT17`