Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 9

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 04.07.–06.07.2017)

T 1 (Rechentricks für Residuen)**.**

(a) Seien g, h holomorph in einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $h(z_0) = 0, h'(z_0) \neq 0$. Dann gilt: $\mathrm{Res}_{z_0}\left(\frac{g}{h}\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.

(b) Berechnen Sie alle Residuen in den isolierten Singularitäten von $z \mapsto z^3/(1-e^z)$, definiert auf ihrem maximalen Definitionsgebiet $\subset \mathbb{C}$.

T 2. Sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant Null. Zeigen Sie: die Funktion $1/f$, definiert auf ihrem maximalen Definitionsgebiet $\subset U$, hat keine wesentliche Singularitäten in U.

(a) Zitieren Sie ein Ergebnis der Vorlesung, aus dem die Behauptung sofort folgt.

(b) Folgern Sie die Behauptung aus dem Potenzreihenentwicklungssatz.

Hinweis. S. Rückseite.

T 3 (Satz von Casorati-Weierstraß)**.** Sei z_0 eine wesentliche Singularität von $f\colon U \to \mathbb{C}$. Dann ist $f(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\})$ dicht in $\mathbb{C}$ für alle $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(z_0) \subset U$.

Hinweis. S. Rückseite.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 11.07.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1 (Komplexe Kurvenintegrale via Residuensatz)**.** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\text{(a)} \quad \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{1}{z^2(z-1)} dz,$$

jeweils für (i) $z_0 = 0$, $r = \frac{1}{2}$; (ii) $z_0 = 1$, $r = \frac{1}{2}$; (iii) $z_0 = 0$, $r = 2$.

$$\text{(b)} \quad \int_{\partial B_1(0)} e^{\frac{1}{z}} dz \quad \text{und} \quad \int_{\partial B_1(0)} z^3 \sin\frac{1}{z} dz.$$

H 2. Berechnen Sie durch Wahl geeigneter komplexer Kurven

$$\text{(a)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx, \qquad \text{(b)} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\lambda x}}{1+e^x} dx \quad \big(\lambda \in (0,1)\big).$$

Hinweis. S. Rückseite.

Hinweis (T 2). *Zu (b): Sei z_0 eine Nullstelle von f, sei U_{z_0} eine Umgebung von z_0. Schreiben Sie f als Produkt $(z-z_0)^k\tilde{f}(z_0), k \in \mathbb{N}$, für eine geeignete Funktion $\tilde{f}\colon U_{z_0} \to \mathbb{C}$, wobei $\tilde{f}(z_0) \neq 0$.*

Hinweis (T 3). *Widerspruchsbeweis. Betrachten Sie für ein geeignetes $w_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion*

$$h(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}$$

auf einer passenden Umgebung. Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, um die Art der Singularität von h bei z_0 zu bestimmen. Verwenden Sie Aufgabe T 2, um zu folgern, dass z_0 keine wesentliche Singularität von f ist.

Hinweis (H 2). *Zu (a): Gehen Sie analog zur Berechnung von $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ in der Vorlesung vor. Zu (b): Bestimmen Sie zunächst alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ von $1 + e^z$, indem Sie $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ schreiben.*

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17