



Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 27.06.–29.06.2017)

T 1 (Singularitäten). Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(a) $\frac{z^3 - z}{z^2 - 1}$; (b) $\frac{z^2 - 1}{z^3 + z}$; (c) $\frac{\sinh(z)}{1 - e^z}$; (d) $\cosh \frac{1}{z}$.

Handelt es sich um einen Pol, ist auch die Ordnung des Pols zu bestimmen.

T 2 (Laurentreihen). Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{z - z_0}$ in eine Laurentreihe in allen Kreisringen mit Zentrum 0, in denen sie holomorph ist, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$.

T 3 (Residuen aus Laurentreihen). Berechnen Sie jeweils alle Residuen folgender Funktionen, indem Sie diese Funktionen in ihre Laurentreihen um die Singularitäten entwickeln:

(a) $\frac{3e^z}{1 - z}$; (b) $\frac{1}{(z - 5)^2}$; (c) $\frac{z^2}{(z - 5)^2}$; (d) $\frac{1 - \cos(2z)}{z^5}$.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 04.07.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1 (Singularitäten). Klassifizieren Sie die isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen:

(a) $\frac{z - 1}{(z^4 - 1)^2}$; (b) $\frac{z}{\sin z}$; (c) $e^{-z^{-3}}$; (d) $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$.

Handelt es sich um einen Pol, ist auch die Ordnung des Pols zu bestimmen.

H 2 (Laurentreihen). Entwickeln Sie die Funktion $f(z) = \frac{1}{(z+2)(1-z)}$ in eine Laurentreihe in allen Kreisringen mit Zentrum 0, in denen sie holomorph ist.

H 3 (Residuen und Pole erster Ordnung). (a) Sei f bis auf einen Pol $z_0 \in \mathbb{C}$ der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung von z_0 holomorph. Zeigen Sie:

$$\text{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_0)^n f(z).$$

(b) Geben Sie jeweils alle Residuen an. Verwenden Sie Teilaufgabe (a).

(i) $\frac{1}{z^4 - 1}$; (ii) $\frac{e^{iz}}{z^4 - 1}$; (iii) $\frac{1}{z^5 - z}$; (iv) $\frac{e^{-z^2}}{z - 2}$;
(v) $\frac{z^2}{(z - 5)^2}$; (vi) $\frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$; (vii) $\sin \frac{1}{z}$.

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:

<http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17>