Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 7

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 20.06.–22.06.2017)

T 1 (Abschätzung der Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung einer holomorphen Funktion)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph mit Potenzreihenentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

für alle $z \in B_R(z_0) \subset U$. Sei $0 < r < R$ und $M := \sup_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$. Dann gilt: $|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n}$.

T 2. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei $B_r(z_0)$, $z_0 \in U$, eine Kreisscheibe vom Radius $r > 0$, so dass $a \in B_r(z_0)$, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Folgern Sie aus dem Potenzreihenentwicklungssatz:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_1(1)} \frac{\sin(\pi z)}{(z^2-1)^2} dz.$$

Hausaufgaben

(Abgabe bis 27.06.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion, indem Sie die Koeffizienten aus dem Potenzreihenentwicklungssatz,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \quad (r > 0),$$

unmittelbar aus der Definition des Kurvenintegrals berechnen.

H 2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2} dz,$$

wobei $B_r(z_0) = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 - 2y \leqslant 0\}$.

Hinweis. S. Rückseite.

H 3. (a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$. Dann ist f konstant.

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant. Dann gilt: Für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $|f(z) - w| < \varepsilon$.

Hinweis. Zu (b): s. Rückseite.

H* 4. Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und von polynomiellem Wachstum, d. h. es gibt $C > 0, N \in \mathbb{N}$ so dass $f(z) < C(1 + |z|)^N$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: f ist ein Polynom.

Hinweis (H 2). *Schreiben Sie das Integral in der Form von T 2 (a).*

Hinweis (H 3). *Betrachten Sie die Funktion* $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$.

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17