Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 6

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 13.06.–15.06.2017)

T 1. Betrachten Sie das Vektorfeld

$$\begin{aligned} v\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}^3; \\ x &\mapsto -\frac{x}{|x|^3}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie $\operatorname{curl} v(x)$.

(b) Zeigen Sie: $v(x) = \nabla \frac{1}{|x|}$. Hier und im Folgenden ist der Gradient $\nabla\varphi$ einer differenzierbaren skalaren Funktion $\varphi\colon \mathbb{R}^d \supset U \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\nabla\varphi(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_d}(x) \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^d \supset U \to \mathbb{R}$, $d \in \{2, 3\}$, zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: $\operatorname{curl} \nabla\varphi = 0$.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 20.06.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und sternförmig, sei $v\colon U \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $Dv = Dv^T$. Zeigen Sie:

$$\varphi(x) := \int_{[c,x]} v \cdot ds$$

ist eine Stammfunktion von v, d. h. $v = \nabla\varphi$, für ein geeignetes $c \in U$.

Hinweis. S. Rückseite.

H 2. (a) Berechnen Sie den komplexen Integral

$$F(z) := \int_{[0,z]} f(\xi)\, d\xi, \quad z \in \mathbb{C}$$

für $f(\xi) = \xi^{2017}$.

(b) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Lichte des Poincaré'schen Lemmas.

H 3 (Gibt's das?)**.** *Nennen* Sie je ein Beispiel für folgende Objekte, falls sie existieren, oder begründen Sie *kurz*, warum es sie nicht gibt:

1. eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, deren Real- und Imagin"arteil an der Stelle $z = 1 + i$ die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen nicht erfüllen;
2. ein Integrationsweg $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\gamma(0) = i$ und $\gamma(1) = -i$;
3. ein Integrationsweg $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, der zu dem in 2. genannten Integrationsweg γ_1 in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ homotop ist;
4. eine sternförmige Menge in $\mathbb{C}$, das nicht konvex ist;
5. eine konvexe Menge in $\mathbb{C}$, die nicht sternförmig ist;
6. eine offene Menge $U \subset \mathbb{C}$ und darauf eine nichtkonstante holomorphe Funktion f, deren Argument $\arg(f)$ konstant ist.
7. Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Gibt es eine geschlossene Kurve $\gamma \in U$ so dass $\int_\gamma f(z)\,dz \neq 0$?

Hinweis (H1). *Gehen Sie wie im Beweis des Poincaré'schen Lemmas vor, um zu zeigen:*

$$\frac{\varphi(z+he) - \varphi(z)}{h} \to v(z) \cdot e \quad \textit{für } h \to 0 \tag{1}$$

für jedes $e \in \mathbb{R}^d$ mit $|e| = 1$. Benutzen Sie insbesondere das Verschwinden des reellen Kurvenintegrals von v längst des Dreiecks mit Eckpunkten $z, z + he$, und einem geeigneten Punkt c (siehe Satz 3.2). Folgen Sie die Behauptung aus Gleichung 1 durch Wahl geeigneter Vektoren e.

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17