Technische Universität München

PROF. DR. GERO FRIESECKE
ARSENIY TSIPENYUK

SS 2017
BLATT 5

Funktionentheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 30.05.–01.06.2017)

T 1. Bestimmen Sie das Integral der Funktion $f(z) = z^2$ zwischen den Punkten 0 und $1 + i$:

(a) entlang der Geraden, die die Punkte 0 und $1 + i$ verbindet;

(b) entlang der Parabel $y = x^2$ (mit der üblichen Notation $z = x + iy$).

Benutzen Sie jeweils geeignete Resultate der Vorlesung.

T 2. Bestimmen Sie durch geometrische Überlegungen den maximalen Radius $r \in (0, 1)$, sodass der Viertelkreisring

$$\left\{ \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix} \mid 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, r \leqslant \rho \leqslant 1 \right\}$$

sternförmig ist.

T 3. Seien $U \in \mathbb{C}$ offen, $\overline{B_R(z_0)} \setminus \{z_0\} \subset U, z_0 \in \mathbb{C}$, und $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: Für $r \in (0, R)$ gilt

$$\int_{\partial B_r(z_0)} f(z)\, dz = \int_{\partial B_R(z_0)} f(z)\, dz.$$

Hinweis: s. Rückseite.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 13.06.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(z) = e^z$ unmittelbar aus der Definition des Kurvenintegrals

(a) entlang eines Halbkreises von -3 bis 3;

(b) auf dem Geradenabschnitt zwischen -3 und 3.

(c) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis mithilfe geeigneter Resultate der Vorlesung.

H 2. Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\overline{B_r(z_0)} \subset U$, $f(z_0) = 0$, $f\big|_{B_r(z_0)\setminus z_0} \neq 0$,, $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{dz}{f(z)} = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$

Bitte wenden!

Hinweis (T 3). *Zerlegen Sie den Kreisring $B_R(z_0) \setminus B_r(z_0)$ in geeignete sternförmige Teilgebiete. Zur Begründung der Sternförmigkeit ist ein kurzes anschauliches Argument ausreichend.*

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17