Prof. Dr. Gero Friesecke
Arseniy Tsipenyuk

SS 2017
Blatt 2

Funktionetheorie [MA2006/MA2008]

Tutoraufgaben

(Besprechung im Zeitraum vom 09.05.–11.05.2017)

T 1. Diskutieren Sie geometrisch die Transformation $\mathbb{C} \ni z \mapsto z^n \in \mathbb{C}$. Was ist ihre Wirkung auf den Kreissektor $S_r = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi/n]\}$ (für ein $r > 0$)?

T 2 (Cayley-Abbildung)**.** Sei $H_+ := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $f \colon H_+ \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \frac{z-i}{z+i}.$$

(a) Zeigen Sie: es gilt $|f(z)| < 1$ für alle $z \in H_+$. Mit anderen Worten, es ist $f(H_+) \subset K_1(0)$. (Dabei bezeichnet $K_1(0)$ die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$.)

(b) Bestimmen Sie eine Abbildung $g \colon K_1(0) \to \mathbb{C}$ derart, dass $f(z) = w$ genau dann, wenn $z = g(w)$, d. h. lösen Sie die Gleichung $f(z) = w$ nach z auf. (Ein solches g heißt Umkehrabbildung von f.) Zeigen Sie: $g(K_1(0)) \in H_+$.

(c) Zeigen Sie, dass $f \colon H_+ \to K_1(0)$ und $g \colon K_1(0) \to H_+$ bijektiv sind. Zeigen Sie, dass f und g holomorph auf ihrem jeweils angegebenen Definitionsbereich sind.

Hausaufgaben

(Abgabe bis 16.05.2017, 18:00 Uhr, Briefkasten im MI-Untergeschoss)

H 1. (a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der Funktionen $\cos z$ und $\sin z$, $z \in \mathbb{C}$.

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $\sin z$ in $\mathbb{C}$.

H 2 (Bernoullische Zahlen)**.** (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z-1}{z}, & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis. Schreiben Sie die Funktion als eine Potenzreihe um. Zeigen Sie, dass diese Potenzreihe auf ganz $\mathbb{C}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g(z) = 1/f(z)$ in einer Umgebung von $z = 0$ holomorph ist.

(c) Berechnen Sie aus der Gleichung

$$(e^z - 1)g(z) = z$$

eine Rekursionsformel für die Koeffizienten B_n („Bernoulli'sche Zahlen") der Potenzreihenentwicklung

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Berechnen Sie die ersten fünf Bernoullische Zahlen.

H* 3 (Gauss-Lucas theorem)**.** Sei $P(z)$ ein Polynom mit Faktorisierung

$$P(z) = c(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Hier bezeichnet $c \in \mathbb{C}$ eine von Null verschiedene Konstante, und $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $n \geqslant 1$, sind die (nicht unbedingt verschiedenen) Nullstellen des Polynoms.

(a) Nehmen Sie an, dass alle Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$ in der oberen komplexen Halbebene $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) \geqslant 0\}$ liegen. Zeigen Sie, dass alle Nullstellen der Ableitung $P'(z)$ auch in der oberen komplexen Halbebene liegen.

Hinweis. Benutzen Sie Produktregel, um die logarithmische Ableitung $\frac{P'(z)}{P(z)}$ *in Partialbrüche zu zerlegen. Betrachten Sie das Vorzeichen des Imaginärteils dieser logarithmischen Ableitung für solche* z*, die außerhalb der oberen komplexen Halbebene liegen.*

(b) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen von P' in der konvexen Hülle der Menge $\{z_1, \ldots, z_n\}$ der Nullstellen von P liegen. (Die konvexe Hülle ist in diesem Fall durch das kleinste konvexe Polygon gegeben, dass $z_1, \ldots, z_n$ enthält.)

Hinweis. Betrachten Sie zunächst den Fall $P'(z) = 0$, $P(z) \neq 0$. *Benutzen Sie die logarithmische Ableitung, um folgende Gleichung herleiten:*

$$z = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j$$

für $\alpha_j = 1/\left(|z - z_i|^2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|z - z_k|^2}\right)$. *Was muss für alle* α_j *gelten, damit* z *in der konvexen Hülle der Menge* $z_1 \ldots, z_n$ *liegt?*

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:
http://www-m7.ma.tum.de/bin/view/Analysis/FunkTheo17